## 4.1.2　指数幂的拓展

[学习目标]　通过对有理数指数幂(*a*>0,且*a*≠1,*m*,*n*为整数,且*n*>0)、实数指数幂*ax*(*a*>0,且*a*≠1,*x*∈R)含义的认识,了解指数幂的拓展过程,掌握指数幂的运算性质.

导语

牛顿(Newton1643-1727)是大家所熟悉的物理学家,可是你知道他在数学史上的贡献吗?他在1676年6月13日写给莱布尼茨的信里说:“因为数学家将*aa*,*aaa*,*aaaa*,…写成*a*2,*a*3,*a*4,…,所以可将,,,…写成,,,…,将,,,…写成*a*-1,*a*-2,*a*-3,…”,这是牛顿首次使用任意实数指数,这正是这节课我们要学习的指数幂的拓展过程.

一、根式与分数指数幂的互化

问题　被开方数的指数不能被根指数整除的根式,比如,,,,*a*>0,是否也可以表示为分数指数幂的形式?如何表示?

提示　=,==,=,==.

知识梳理

分数指数幂的意义

(1)规定正数的正分数指数幂的意义:=(*a*>0,*m*,*n*∈**N***\**,*n*>1).

(2)规定正数的负分数指数幂的意义:=(*a*>0,*m*,*n*∈**N***\**,*n*>1).

(3)0的正分数指数幂为0,0的负分数指数幂没有意义.

注意点:

(1)分数指数幂不可理解为个*a*相乘,它是根式的一种写法.

(2)正数的负分数指数幂总表示正数,而不是负数.

例1　把下列根式化成分数指数幂的形式,其中*a*>0.

(1);(2).

解　(1)=.

(2)===*a*3.

反思感悟　根式与分数指数幂互化的规律

(1)根指数↔分数指数的分母,被开方数(式)的指数↔分数指数的分子.

(2)如果根式中含有多重根号,要由里向外用分数指数幂写出.

跟踪训练1　把下列根式化成分数指数幂的形式,其中*a*>0.

(1);(2).

解　(1)==.

(2)==.

二、利用指数幂的运算性质化简和求值

知识梳理

1.对于有理数指数幂,原整数指数幂的运算性质,保持不变,即:

(1)*asat*=*as*+*t*(*a*>0,*s*,*t*∈**Q**);

(2)(*as*)*t*=*ast*(*a*>0,*s*,*t*∈**Q**);

(3)(*ab*)*t*=*atbt*(*a*>0,*b*>0,*t*∈**Q**);

(4)拓展:①=*as*-*t*(*a*>0,*s*,*t*∈**Q**),

②=(*a*>0,*t*∈**Q**).

2.一般地,当*a*>0且*x*是一个无理数时,*ax*是一个确定的实数.有理数指数幂的运算性质对无理数指数幂同样适用.

注意点:

(1)有理数指数幂的运算性质记忆口诀:乘相加,除相减,幂相乘.

(2)不要自创公式,严格按照公式化简、运算.

例2　化简求值:

(1)+2-2×-(0.01)0.5;

(2)-++-π0;

(3)(*a*-2*b*-3)×(-4*a*-1*b*)÷(12*a*-4*b*-2*c*)(*a*>0,*b*>0,*c*≠0).

解　(1)原式=1+×-=.

(2)原式=-+

+-1

=-++-1=3.

(3)原式=-4*a*-2-1*b*-3+1÷(12*a*-4*b*-2*c*)

=-*a*-3-(-4)*b*-2-(-2)*c*-1

=-*ac*-1=-.

反思感悟　指数幂运算的常用技巧

(1)有括号先算括号里的,无括号先进行指数运算.

(2)负指数幂化为正指数幂的倒数.

(3)底数是小数,先要化成分数;底数是带分数,先要化成假分数,然后要尽可能用幂的形式表示,便于运用指数幂的运算性质.

跟踪训练2　化简求值:

(1)0.02-+25+(2-3-1+π0;

(2)+0.1-2+-3π0+;

(3)2÷4×3(*a*>0,*b*>0).

解　(1)原式=(0.33-+(44+(-+1=0.3-+43+2-+1=64.

(2)原式=+100+-3+=100+-3

=100.

(3)原式=2÷(4)×(3)

=×3=.

三、整体代换法求分数指数幂

例3　已知*x*+*x*-1=7,求值:

(1)+;

(2)*x*2+*x*-2;

(3)-;

(4)*x*2-*x*-2.

解　(1)设*m*=+,

两边平方得*m*2=*x*+*x*-1+2=7+2=9,

因为*m*>0,所以*m*=3,即+=3.

(2)将*x*+*x*-1=7两边平方得

*x*2+*x*-2+2=49,

所以*x*2+*x*-2=47.

(3)设*n*=-,

两边平方得*n*2=*x*+*x*-1-2=7-2=5,

因为*n*∈**R**,所以*n*=±,

即-=±.

(4)由(1)(3)知+=3,

-=±.

所以*x*-*x*-1=(+)(-)=±3,

*x*2-*x*-2=(*x*+*x*-1)(*x*-*x*-1)=±21.

反思感悟　利用整体代换法求分数指数幂

(1)整体代换法是数学变形与计算常用的技巧方法,分析观察条件与结论的结构特点,灵活运用恒等式是关键.

(2)利用整体代换法解决分数指数幂的计算问题,常常运用完全平方公式及其变形公式.

*x*2+*x*-2=(*x*±*x*-1)2∓2,*x*+*x*-1=(±)2∓2,+=(±)2∓2.

跟踪训练3　已知9*x*=5,求的值.

解　由9*x*=5,得9-*x*=,

则9*x*+9-*x*=,即(3*x*+3-*x*)2-2=,

∴(3*x*+3-*x*)2=,

又∵3*x*+3-*x*>0,∴3*x*+3-*x*=,

∴=3*x*+3-*x*=.

D:\杂\word图标\word图标\课堂小结通.tif

1.知识清单:

(1)根式与分数指数幂的互化.

(2)分数指数幂的运算.

2.方法归纳:整体代换法.

3.常见误区:在运用分数指数幂的运算性质化简时,其结果不能同时含有根式和分数指数,也不能既含有分母又含有负指数.



1.(多选)下列根式与分数指数幂的互化正确的是(　　)

A.-=(-*x*

B.=(*y*<0)

C.=(*x*>0)

D.=(*x*>0)

答案　CD

解析　对于选项A,因为-=-(*x*≥0),

而(-*x*=(*x*≤0),

故A错误;

对于选项B,因为=-(*y*<0),

故B错误;

对于选项C,=(*x*>0),

故C正确;

对于选项D,==(*x*>0),故D正确.

2.代数式(*a*>0)的化简结果是(　　)

A. B.

C. D.

答案　A

解析　====.

3.若10*x*=3,10*y*=4,则102*x*-*y*=　　　　.

答案

解析　∵10*x*=3,∴1=9,∴102*x*-*y*==.

4.计算:0.25×-4÷20-=　　　.

答案　-4

解析　原式=×16-4÷1-

=4-4-4=-4.

## 课时对点练　[分值:100分]

单选题每小题5分,共35分;多选题每小题6分,共12分



1.若(1-2*x*有意义,则*x*的取值范围是(　　)

A.**R** B.∪

C. D.

答案　D

解析　将分数指数幂化为根式,可知需满足1-2*x*>0,解得*x*<.

2.将化为分数指数幂为(　　)

A. B.-

C. D.-

答案　B

解析　===-.

3.化简(2*a*-3)(-3*a*-1*b*)÷(4*a*-4)(*a*>0,*b*>0)得(　　)

A.-*b*2 B.*b*2

C.- D.

答案　A

解析　原式==-*b*2.

4.下列各式中正确的是(　　)

A.=

B.=*x*(*x*>0,*y*>0)

C.=-

D.=(*x*≠0,*y*≠0)

答案　D

解析　==,故A错误;

==(*xy*(*x*>0,*y*>0),故B错误;

取*a*=8,*b*=1,则=,-=3,故C错误;

==(*x*≠0,*y*≠0),故D正确.

5.若*x*>0,则(2+)(2-)-4(*x*-)等于(　　)

A.-23 B.23

C.-23 D.-23

答案　A

解析　原式=(2)2-()2-4·*x*+4=4-27-4+4=-23.

6.(多选)下列化简结果中正确的有(字母均为正数)(　　)

A.(*am*)*n*=*amn* B.=

C.= D.*an*+*bn*=(*a*+*b*)*n*

答案　AB

解析　由指数幂的运算性质可得(*am*)*n*=*amn*,=,=*am*-*n*≠,AB选项正确,C选项错误;取*a*=*b*=1,*n*=2,则*an*+*bn*=2≠22=(*a*+*b*)*n*,D选项错误.

7.(5分)化简:=　　　　.

答案　1

解析　原式====1.

8.(5分)已知-=3,则+=　　　　.

答案

解析　=*a*+*a*-1+2

=+4=9+4=13.

因为+>0,

所以+=.

9.(10分)化简下列各式(*x*>0,*y*>0):

(1)(-)(3)(-2);(5分)

(2)2(-3)÷(-6).(5分)

解　(1)(-)(3)(-2)

=[-1×3×(-2)]

=6*x*0*y*1=6*y*.

(2)2(-3)÷(-6)

=[2×(-3)÷(-6)]=*x*2*y*.

10.(11分)计算:

(1)7-3-6+;(5分)

(2)0.008-×-10×0.02.(6分)

解　(1)原式=7×-3××2-6×+(3×=-6×+

=2×-2×3×=2×-2×=0.

(2)原式=-(3×1)-1×-10×(0.33

=-×-10×0.3

=--3=0.



11.(*a*>0)等于(　　)

A.*a*16 B.*a*8

C.*a*4 D.*a*2

答案　C

解析　原式==*a*2*a*2=*a*2+2=*a*4.

12.(多选)下列各式中一定成立的有(　　)

A.=*n*7 B.=

C.=(*x*+*y* D.=

答案　BD

解析　A中应为=*n*7*m*-7;

==,B正确;

C中当*x*=*y*=1时,等式不成立;D正确.

13.已知2*a*=5*b*=*m*,且+=2,则*m*等于(　　)

A. B.10

C.20 D.100

答案　A

解析　由题意得*m*>0,∵2*a*=*m*,5*b*=*m*,

∴2=,5=,∵2×5==,

∴*m*2=10,∴*m*=.

14.(5分)已知*a*2*m*+*n*=2-2,*am*-*n*=28(*a*>0,且*a*≠1),则*a*4*m*+*n*的值为　　　　.

答案　4

解析　因为

所以①×②得*a*3*m*=26,所以*am*=22.

将*am*=22代入②得22·*a*-*n*=28,

所以*an*=2-6,所以*a*4*m*+*n*=*a*4*m*·*an*=(*am*)4·*an*=(22)4·2-6

=22=4.



15.(5分)已知*x*+*x*-1=3,则=　　　　.

答案　±

解析　因为*x*+*x*-1=3,则(*x*+*x*-1)2=*x*2+*x*-2+2=9,可得*x*2+*x*-2=7,则(*x*-*x*-1)2=*x*2+*x*-2-2=5,可得*x*-*x*-1=±,且*x*3+*x*-3=(*x*+*x*-1)(*x*2+*x*-2-1)=3×(7-1)=18,所以==±.

16.(12分)已知2*a*·3*b*=2*c*·3*d*=6,求证:(*a*-1)(*d*-1)=(*b*-1)(*c*-1).

证明　因为2*a*·3*b*=2*c*·3*d*=6,

故2*a*-1·3*b*-1=1,2*c*-1·3*d*-1=1,

所以2*a*-1=31-*b*,2*c*-1=31-*d*,

所以2(*a*-1)(1-*d*)=3(1-*b*)(1-*d*),2(*c*-1)(1-*b*)=3(1-*b*)(1-*d*),

故2(*a*-1)(1-*d*)=2(*c*-1)(1-*b*),

所以(*a*-1)(1-*d*)=(*c*-1)(1-*b*),

故(*a*-1)(*d*-1)=(*b*-1)(*c*-1).