## 4.2.2　对数的运算性质

## 第1课时　对数的运算性质

[学习目标]　1.掌握积、商、幂的对数运算性质,理解其推导过程和成立条件.2.能熟练运用对数的运算性质进行化简求值.

导语

同学们,数学运算的发展可谓是贯穿了整个人类进化史.从人们对天文、航天、航海感兴趣开始,发现数太大了,天文学家开普勒利用他的对数表简化了行星轨道的复杂计算,对数被誉为“用缩短计算时间而使天文学家延长寿命”,对整个科学的发展起了重要作用.

一、对数的运算性质

问题1　将指数式*M*=*ap*(*a*>0,且*a*≠1),*N*=*aq*(*a*>0,且*a*≠1)化为对数式,结合指数运算性质*MN*=*apaq*=*ap*+*q*能否将其化为对数式?它们之间有何联系(用一个等式表示)?

提示　由*M*=*ap*,*N*=*aq*得*p*=log*aM*,*q*=log*aN*.

由*MN*=*ap*+*q*得*p*+*q*=log*a*(*MN*).

从而得出log*a*(*MN*)=log*aM*+log*aN*(*a*>0,*a*≠1,*M*>0,*N*>0).

问题2　结合问题1,若==*ap*-*q*,又能得到什么结论?

提示　将指数式=*ap*-*q*化为对数式,得

log*a*=*p*-*q*=log*aM*-log*aN*(*a*>0,*a*≠1,*M*>0,*N*>0).

问题3　结合问题1,若*Mn*=(*ap*)*n*=*anp*(*n*∈**R**),又能有何结果?

提示　由*Mn*=*anp*,得log*aMn*=*np*=*n*log*aM*(*a*>0,*a*≠1,*M*>0,*n*∈**R**).

知识梳理

对数的运算性质

(1)log*a*(*MN*)=log*aM*+log*aN*.

(2)log*a*=log*aM*-log*aN*.

(3)log*aMn*=*n*log*aM*.

其中*a*>0,*a*≠1,*M*>0,*N*>0,*n*∈**R**.

注意点:

(1)性质的逆运算仍然成立.

(2)公式成立的条件是*M*>0,*N*>0,而不是*MN*>0,比如式子log2[(-2)·(-3)]有意义,而log2(-2)与log2(-3)都没有意义.

(3)性质(1)可以推广为:log*a*(*N*1·*N*2·…·*Nk*)=log*aN*1+log*aN*2+…+log*aNk*,其中*Nk*>0,*k*∈**N***\**.

例1　求下列各式的值.

(1)ln;(2)log3e+log3;(3)lg50-lg5.

解　(1)ln=ln=lne=.

(2)log3e+log3=log3=log33=1.

(3)lg50-lg5=lg=lg10=1.

反思感悟　对数的化简求值一般是正用或逆用公式,对真数进行处理,选哪种策略化简,取决于问题的实际情况,一般本着便于真数化简的原则进行.

跟踪训练1　求下列各式的值:

(1)log3(27×92);(2)lg5+lg2;(3)ln3+ln;

(4)log35-log315.

解　(1)方法一　log3(27×92)=log327+log392=log333+log334=3log33+4log33=3+4=7.

方法二　log3(27×92)=log3(33×34)=log337=7log33=7.

(2)lg5+lg2=lg(5×2)=lg10=1.

(3)ln3+ln=ln=ln1=0.

(4)log35-log315=log3=log3

=log33-1=-1.

二、利用对数的运算性质化简、求值

例2　计算下列各式的值:

(1)(lg5)2+2lg2-(lg2)2;

(2).

解　(1)原式=(lg5)2+(2-lg2)lg2

=(lg5)2+(1+lg5)lg2

=(lg5)2+lg2·lg5+lg2

=(lg5+lg2)·lg5+lg2

=lg5+lg2=1.

(2)原式=

==.

反思感悟　对数运算性质的综合应用解题思路

(1)“收”:将同底的两个对数的和(差)合并为积(商)的对数,即公式逆用.

(2)“拆”:将积(商)的对数拆成同底的两个对数的和(差),即公式的正用.

(3)“凑”:将同底数的对数凑成特殊值,如利用lg2+lg5=1,进行计算或化简.

跟踪训练2　计算下列各式的值:

(1)lg -lg+lg;

(2)lg25+lg8+lg5×lg20+(lg2)2.

解　(1)方法一　原式=(5lg2-2lg7)-×

lg2+(2lg7+lg5)

=lg2-lg7-2lg2+lg7+lg5

=lg2+lg5=(lg2+lg5)=lg10=.

方法二　原式=lg -lg4+lg7

=lg =lg()=lg=.

(2)原式=2lg5+2lg2+lg5×(2lg2+lg5)+(lg2)2=2lg10+(lg5+lg2)2=2+(lg10)2

=2+1=3.

三、对数运算性质的综合应用

例3　已知lg2=*a*,lg3=*b*,则lg=　　　　.

答案　*b*+3*a*-1

解析　lg =lg12-lg5

=lg(3×22)-(1-lg2)

=lg3+lg22-1+lg2

=lg3+3lg2-1=*b*+3*a*-1.

反思感悟　用已知对数的值来表示所求对数的值时,要增强目标意识,把真数拆解成已知对数的真数,合理地把所求向已知条件转化.

跟踪训练3　用lg *x*,lg *y*,lg *z*表示下列各式:

(1)lg(*xyz*);(2)lg ;(3)lg ;(4)lg .

解　(1)lg(*xyz*)=lg *x*+lg *y*+lg *z*.

(2)lg =lg(*xy*2)-lg *z*=lg *x*+lg *y*2-lg *z*

=lg *x*+2lg *y*-lg *z*.

(3)lg=lg(*xy*3)-lg

=lg *x*+lg *y*3-lg=lg *x*+3lg *y*-lg *z*.

(4)lg =lg-lg(*y*2*z*)=lg-(lg *y*2+lg *z*)

=lg *x*-2lg *y*-lg *z*.

D:\杂\word图标\word图标\课堂小结通.tif

1.知识清单:

(1)对数的运算性质.

(2)利用对数的运算性质化简、求值.

(3)对数运算性质的运用.

2.方法归纳:转化法.

3.常见误区:要注意对数的运算性质的结构形式,易混淆,且不可自创运算法则.



1.(多选)若*a*>0,*a*≠1,*x*>0,*n*∈N*\**,则下列各式中正确的有(　　)

A.(log*ax*)*n*=*n*log*ax* B.log*ax*=-log*a*

C.(log*ax*)*n*=log*axn* D.=log*a*

答案　BD

解析　根据对数的运算性质log*aMn*=*n*log*aM*(*M*>0,*a*>0,*a*≠1)知BD正确.

2.2log510+log50.25等于(　　)

A.0 B.1

C.2 D.4

答案　C

解析　原式=log5100+log50.25=log525=2.

3.已知lg3=*a*,lg7=*b*,则lg的值为(　　)

A.*a*-*b*2 B.*a*-2*b*

C. D.

答案　B

解析　∵lg3=*a*,lg7=*b*,

∴lg=lg3-lg49=lg3-2lg7=*a*-2*b*.

4.=　　　　.

答案　2

解析　原式===2.

## 课时对点练　[分值:100分]

单选题每小题5分,共35分;多选题每小题6分,共6分



1.log242+log243+log244等于(　　)

A.1 B.2 C.24 D.

答案　A

解析　原式=log24(2×3×4)=log2424=1.

2.已知3*a*=2,那么log38-2log36用*a*表示为(　　)

A.*a*-2 B.5*a*-2

C.3*a*-(1+*a*)2 D.3*a*-*a*2

答案　A

解析　因为3*a*=2,所以*a*=log32,所以log38-2log36=log323-2(log32+1)=log32-2=*a*-2.

3.计算lg2-lg-eln2等于(　　)

A.-1 B.

C.3 D.-5

答案　A

解析　原式=lg-2=-1.

4.下列计算正确的是(　　)

A.(*a*3)2=*a*9

B.log26-log23=1

C.=0

D.log3(-4)2=2log3(-4)

答案　B

解析　由题意,根据实数指数幂的运算,

可得=*a*6,=*a*0=1,

所以A,C不正确;

由对数的运算性质,可得log26-log23=log2=log22=1,所以B正确;

根据对数的化简,可得log3(-4)2=2log34,

而log3(-4)无意义,所以D不正确.

5.在科技史上,对数的发明大大缩短了计算时间,为人类研究科学和了解自然起了重大作用,对数对估算“天文数字”具有独特优势.已知lg2≈0.301,lg5≈0.699,则6.25500约为(　　)

A.10198 B.10278

C.10398 D.10428

答案　C

解析　由于6.25500==,设=*x*,

则lg *x*=lg=1000lg =1000(lg5-lg2)≈1000×(0.699-0.301)=398,

所以*x*≈10398,即6.25500≈10398.

6.(多选)若*x*>0,*y*>0,则下列各式中,一定成立的是(　　)

A.lg *x*+lg *y*=lg(*x*+*y*) B.lg=lg *x*-lg *y*

C.lg *x*2=(lg *x*)2 D.lg=3lg *y*-lg *x*

答案　BD

解析　对于A,lg *x*+lg *y*=lg(*xy*),故A不正确;

对于B,根据对数的运算法则得lg=lg *x*-lg *y*,故B正确;

对于C,lg *x*2=2lg *x*,故C不正确;

对于D,lg=lg *y*3-lg=lg *y*3-lg=3lg *y*-lg *x*,故D正确.

7.(5分)lg+lg的值是　　　　.

答案　1

解析　原式=lg=lg10=1.

8.(5分)若lg *x*+lg *y*=2lg(*x*-2*y*),则=　　　　.

答案　4

解析　因为lg *x*+lg *y*=2lg(*x*-2*y*)=lg(*x*-2*y*)2,

所以

由*xy*=(*x*-2*y*)2,知*x*2-5*xy*+4*y*2=0,

所以*x*=*y*或*x*=4*y*.

又*x*>0,*y*>0且*x*-2*y*>0,

所以舍去*x*=*y*,故*x*=4*y*,则=4.

9.(10分)已知lg2=*m*,lg3=*n*,试用*m*,*n*表示.

解　∵lg2=*m*,lg3=*n*,

∴===.

10.(12分)计算下列各式的值:

(1)log3+lg25+lg4+;(6分)

(2)2log32-log3+log38-.(6分)

解　(1)原式=log3+lg(25×4)+2=log3+lg102+2=-+2+2=.

(2)原式=2log32-(log325-log39)+3log32-=2log32-5log32+2log33+3log32-9=2-9=-7.



11.已知log*ax*=2,log*bx*=1,log*cx*=4(*a*,*b*,*c*,*x*>0且*a*,*b*,*c*,*x*≠1),则log*x*(*abc*)等于(　　)

A. B.

C. D.

答案　D

解析　*x*=*a*2=*b*=*c*4,所以(*abc*)4=*x*7,

所以*abc*=,即log*x*(*abc*)=.

12.已知*x*log32=1,则2*x*+2-*x*的值是(　　)

A.1 B.3

C. D.

答案　D

解析　由*x*log32=1,可知log32*x*=1,即2*x*=3,

故2*x*+2-*x*=3+=.

13.(5分)(lg2)3+(lg5)3+3lg2·lg5=　　　　.

答案　1

解析　(lg2)3+(lg5)3+3lg2·lg5

=(lg2+lg5)[(lg2)2+(lg5)2-lg2·lg5]+3lg2·lg5

=(lg2)2+(lg5)2-lg2·lg5+3lg2·lg5

=(lg2+lg5)2=1.

14.(5分)若ln *a*,ln *b*是方程4*x*2-8*x*+3=0的两个根,则=　　　　.

答案　1

解析　根据题意,由根与系数的关系可知

ln *a*+ln *b*=2,ln *a*·ln *b*=,

所以=(ln *b*-ln *a*)2=(ln *b*+ln *a*)2-4ln *a*·ln *b*=22-4×=1.



15.(5分)设*a*,*b*,*c*为△*ABC*的三边的长,且关于*x*的方程*x*2-2*x*+log2(*c*2-*b*2)-2log2*a*+1=0有两个相等的实数根,那么这个三角形的形状是　　　　　　　.

答案　直角三角形

解析　由题意得*Δ*=4-4log2(*c*2-*b*2)+8log2*a*-4=0,

∴2log2*a*=log2(*c*2-*b*2).∴*a*2=*c*2-*b*2,

故有*a*2+*b*2=*c*2.∴△*ABC*为直角三角形.

16.(12分)法国数学家马林·梅森是研究素数的数学家中成就很高的一位,人们将“2*p*-1(*p*为素数)”形式的素数称为“梅森素数”,目前仅发现51个“梅森素数”,问267-1这个“梅森素数”的位数是多少?(参考数据:lg2≈0.301)

解　由题意,得lg(267-1)≈lg267=67lg2

≈67×0.301=20.167,

∴267-1≈1020.167,

∴267-1这个“梅森素数”的位数为21位.