江苏省仪征中学2023-2024学年第二学期期末复习卷（1）

一、单选题

1. 函数$f(x)=\ln x-\frac{3}{x}$的零点所在的大致区间是(　)

A. $(1,2)$　　B. $(2,e)$　　C. $(e,3)$　　D. $(3,+\infty)$

2. 已知一组数据5，2，x，5，8，9，且$5<x<8$.若该组数据的众数是中位数的$\frac{5}{6}$倍，则该组数据的平均数为(　)　A. 6　　B. 6.5　　C. 7　　D. 7.5

3. 如果复数z满足$|z+2i|+|z-2i|=4$，那么$|z+i+1|$的最小值是(　)

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

4. 已知函数$f(x)=2\sin x\cos(x+\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}$，$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，则函数$f(x)$的值域是(　)

A. $[-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}]$　　B. $[-\frac{\sqrt{3}}{2},1]$　　C. $[-1,\frac{1}{2}]$　　D. $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

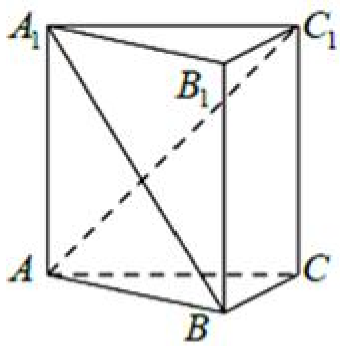
5. 如图，在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB=AA_1$，则异面直线AC_1与A_1B所成角的余弦值是(　)

A. 0

B. $\frac{1}{4}$

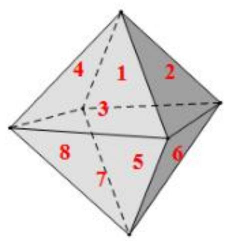
C. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$



6.

如图，在一个质地均匀的正八面体木块的八个面上分别标有数字1,2,3,4,5,6,7,8.连续抛掷这个正八面体木块两次，并记录每次正八面体与地面接触的面上的数字，记“第一次记录的数字为奇数”为事件A，“第二次记录的数字为偶数”为事件B，“两次记录的数字之和为奇数”为事件C，则下列结论正确的是（　　）.



A．B与C是互斥事件　　B．A与B不是相互独立事件

C．$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$　　D．A与C是相互独立事件

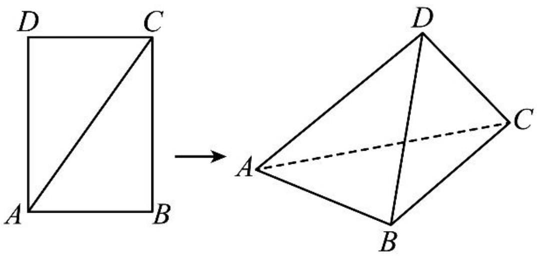
二、多选题

7. 在$\triangle ABC$中，D，E分别是BC，AC的中点，且$BC=6,AD=2$，则(　)

A. $\triangle ABC$面积最大值是6　　B. $\triangle ABC$周长可能是14

C. $|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}|$不可能是5　　D. $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AC}\in(\frac{11}{2},\frac{35}{2})$

8. 已知矩形 $ABCD$，$AB=1$，$BC=\sqrt{3}$，将$\triangle ADC$沿对角线 AC 进行翻折，得到三棱锥$D-ABC$，在翻折过程中，下列结论正确的是(　)



A. 三棱锥$D-ABC$的外接球的体积不变

B. 三棱锥$D-ABC$的体积的最大值为$\frac{1}{3}$

C. 当三棱锥$D-ABC$的体积最大时，二面角$D-BC-A$的正切值为 $2\sqrt{3}$

D. 异面直线 AB 与 CD 所成角的最大值为$90°$

三、填空题

9. 数学家欧拉 1707 年 4 月 15 日生于瑞士巴塞尔，1783 年 9 月 18 日卒于俄国圣彼得堡．他生于牧师家庭．15 岁在巴塞尔大学获学士学位，翌年得硕士学位．1727 年，欧拉应圣彼得堡科学院的邀请到俄国工作．1731 年接替丹尼尔·伯努利成为物理教授．他以旺盛的精力投入研究，在俄国的 14 年中，他在分析学、数论和力学方面作了大量出色的工作．1748 年，欧拉发现了复指数函数和三角函数的关系，并写出以下公式$e^{ix}=\cos x+i\sin x$(其中 i 为虚数单位)，这个公式在复变论中占有非常重要的地位，被誉为“数学中的天桥”．根据此公式，则$e^{i\pi}-1=$__________；$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^{2022}=$__________.

10. 在正四棱锥$S-ABCD$中，底面是边长为 2 的正方形，侧面是腰长为$\sqrt{6}$的等腰三角形，则正四棱锥$S-ABCD$的外接球的体积为___________.

四、解答题

11. 已知复数$z_1=\frac{2m^2}{1-i}$，$z_2=(2+i)m-3(1+2i)$，$m\in R$，i 为虚数单位.

(1)若z_1+z_2是纯虚数，求实数 m 的值;

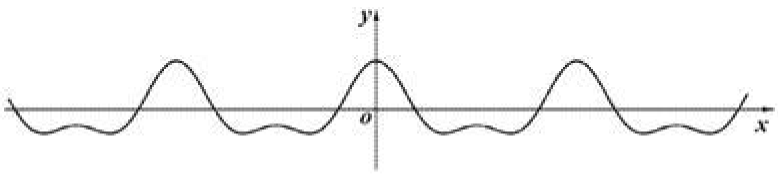
(2)若$z_1+z_2>0$，求$z_1\cdot z_2$的值.

12. 在 $\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，且满足$(\sin B+2\sin C)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\sin B\cdot\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

(1)求角A；

(2)若D为BC的中点，且$AD=\sqrt{3},\angle BAC$的角平分线交BC于点E，且$AE=\frac{1}{3}$，求边长a.

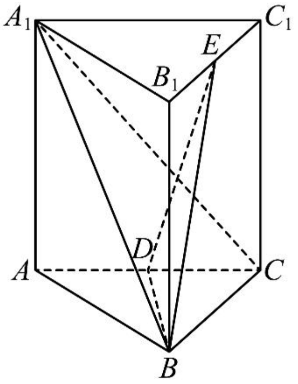
13. 光波、电波、声波……，现实世界的波动现象无处不在．丰富多彩的波动现象大都可以用一族三角函数的叠加来刻画，已知某种波动现象对应的函数为$f(x)=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x$，其图象如下图所示．请你根据所学的数学知识，回答下列问题．



(1)求$f(x)$的最小值，及取到最小值时x的取值集合；

(2)探究$f(x)$在$\left(1,\frac{5\pi}{3}\right)$是否存在零点，并说明理由．

14. 如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，平面$A_1BC\perp$平面AA_1B_1B.



(1)求证：$\triangle ABC$为直角三角形；

(2)设点 D，E 分别为棱 AC，B_1C_1的中点，若二面角A_1-BC-A的大小为$45°$，且$AB=BC=2$，求直线 BC 与平面 BDE 所成角的正弦值.

江苏省仪征中学2023-2024学年第二学期期末复习卷（1）

一、单选题

1. 函数$f(x) = \ln x - \frac{3}{x}$的零点所在的大致区间是(　)

A. $(1,2)$　　B. $(2, e)$　　C. $(e, 3)$　　D. $(3, +\infty)$

【答案】C

【解答】解：$\because f(x) = \ln x - \frac{3}{x}$，

$\therefore$易得函数$f(x)$在$(0, +\infty)$上单调递增，

$\because f(3) = ln3 - 1 > 0$，$f(e) = lne - \frac{3}{e} = 1 - \frac{3}{e} < 0$，

$\therefore f(3) \cdot f(e) < 0$，

$\therefore$在区间$(e, 3)$内函数$f(x)$存在零点.

故选 C.

2. 已知一组数据 5，2，x，5，8，9，且$5 < x < 8$.若该组数据的众数是中位数的$\frac{5}{6}$倍，则该组数据的平均数为(　)

A. 6　　B. 6.5　　C. 7　　D. 7.5

【答案】A

【解答】

解：由题意知，该组数据从小到大排序如下：2，5，5，x，8，9，

故该组数据的众数是 5，中位数是$\frac{5+x}{2}$，

故$5 = \frac{5+x}{2} \times \frac{5}{6}$，故$x = 7$，

所以该组数据的平均数为$\frac{2+5+5+7+8+9}{6} = 6$.

故选：A.

3. 如果复数 z 满足$|z + 2i| + |z - 2i| = 4$，那么$|z + i + 1|$的最小值是(　)

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

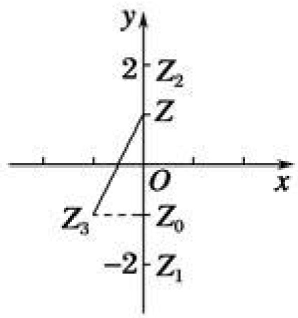
【答案】A

【解答】

解：设复数$-2i$，$2i$，$-(1 + i)$在复平面内对应的点分别为Z_1，Z_2, Z_3，

因为$|z + 2i| + |z - 2i| = 4$，$|Z_1Z_2| = 4$，

所以复数 z 的几何意义为线段Z_1Z_2，如图所示，



问题转化为：动点 Z 在线段Z_1Z_2上移动，求$|ZZ_3|$的最小值．

因此作$Z_3Z_0\perp Z_1Z_2$于Z_0，

则Z_3与Z_0的距离即为所求的最小值，$|Z_0Z_3|=1$.

故选A.

4. 已知函数$f(x)=2\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$，$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，则函数$f(x)$的值域是(　)

A. $[-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}]$　　B. $[-\frac{\sqrt{3}}{2},1]$　　C. $[-1,\frac{1}{2}]$　　D. $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

【答案】B

【解答】解：$f(x)=2\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=2\sin x\cdot\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=sinx\cdot cos\,x-\sqrt{3}sin^2x+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$

$=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，

当$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$时，$2x+\frac{\pi}{3}\in[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}]$, $\therefore\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\in[-\frac{\sqrt{3}}{2},1]$.

故选 B.

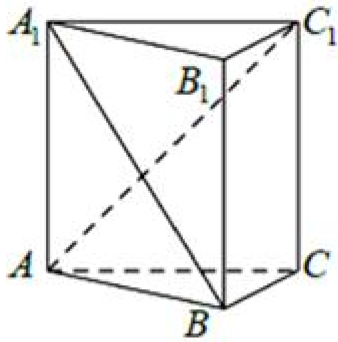
5. 如图，在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB=AA_1$，则异面直线AC_1与A_1B所成角的余弦值是(　)

A. 0

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

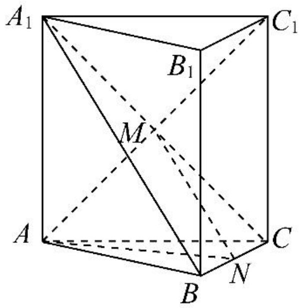
D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$



【答案】B

【解答】

解：设正三棱柱底面边长为$AB=a$，则$AA_1=a$，



设AC_1，A_1C交于 M，取 BC 中点为 N，

则$MN//A_1B$，$MN=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，

∴异面直线AC_1与A_1B所成角为$\angle AMN$(或其补角)，

在ΔAMN中，$AM=\frac{1}{2}AC_1=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，$AN=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，$MN=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，

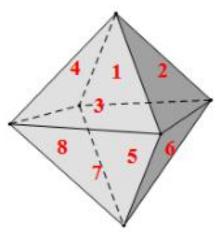
则 $\cos\angle AMN=\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}a\times\frac{\sqrt{2}}{2}a}=\frac{1}{4}$,

所以异面直线AC_1与A_1B所成角的余弦值等于$\frac{1}{4}$,

故选：B.

6.

如图，在一个质地均匀的正八面体木块的八个面上分别标有数字 1,2,3,4,5,6,7,8. 连续抛掷这个正八面体木块两次，并记录每次正八面体与地面接触的面上的数字，记“第一次记录的数字为奇数”为事件 A，“第二次记录的数字为偶数”为事件 B，“两次记录的数字之和为奇数”为事件 C，则下列结论正确的是（　　）.



A．B 与 C 是互斥事件　　　　B．A 与 B 不是相互独立事件

C．$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$　　　　D．A 与 C 是相互独立事件

【答案】D

二、多选题

7. 在$\triangle ABC$中，D，E 分别是 BC，AC 的中点，且$BC=6,AD=2$，则(　)

A. $\triangle ABC$面积最大值是 6

B. $\triangle ABC$周长可能是 14

C. $|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}|$不可能是 5

D. $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AC}\in(\frac{11}{2},\frac{35}{2})$

【答案】AD

【解答】

解：设$\triangle ABC$的三个内角A,B,C所对的边分别为a,b,c.

选项 A，$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}\times 6\times h_a\le\frac{1}{2}\times 6\times 2=6$，当$AD\perp BC$时等号成立，故 A 正确；

选项 B，$c^2=3^2+2^2-2\times 2\times 3\cos\angle ADB$，

$b^2=3^2+2^2-2\times 2\times 3\cos\angle ADC$，

$\angle ADB+\angle ADC=\pi$，

则$c^2+b^2=26$，所以三角形周长为$a+b+c=b+c+6>12$，

由基本不等式$\frac{b+c}{2}\le\sqrt{\frac{c^2+b^2}{2}}=\sqrt{\frac{26}{2}}$，当且仅当$b=c=\sqrt{13}$时等号成立，

可得$c+b+6\le 2\sqrt{13}+6$，即三角形的周长的范围是$\left(12,2\sqrt{13}+6\right]$,

$14\notin(12,2\sqrt{13}+6]$,所以三角形周长不可以取到 14，故选项 B 错误；

选项 C，$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$=\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA})=\frac{3}{2}\overrightarrow{DC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$,

所以$|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}|=\sqrt{(\frac{3}{2}\overrightarrow{DC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DA})^2}=\frac{\sqrt{9|\overrightarrow{DC}|^2+|\overrightarrow{DA}|^2-6\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}}}{2}=\frac{\sqrt{85-6\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}}}{2}$,

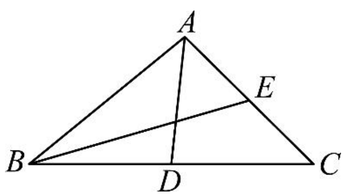
$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}=|\overrightarrow{DC}|\cdot|\overrightarrow{DA}|\cos\angle ADC=6\cos\angle ADC\in(-6,6)$，

所以$|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}|\in(\frac{7}{2},\frac{11}{2})$，所以$|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}|$的值可能取到 5，故选项 C 错误；

选项 D，$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA})=\frac{3}{2}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$,

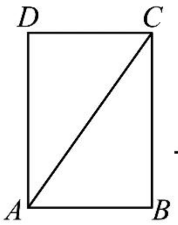
$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AC}=(\frac{3}{2}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DA})\cdot(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA})=\frac{3}{2}|\overrightarrow{DC}|^2-\frac{1}{2}|\overrightarrow{DA}|^2-\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}=\frac{23}{2}-\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}$,

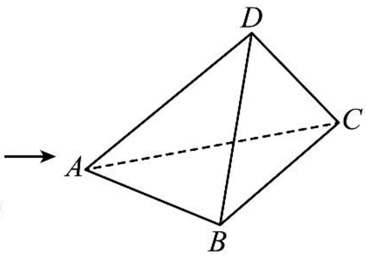
由$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}\in(-6,6)$，则$\frac{23}{2}-\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}\in(\frac{11}{2},\frac{35}{2})$，故选项 D 正确.



故选：AD

8. 已知矩形 $ABCD$，$AB=1$，$BC=\sqrt{3}$，将$\triangle ADC$沿对角线 AC 进行翻折，得到三棱锥$D-ABC$，在翻折过程中，下列结论正确的是(   )





A. 三棱锥$D-ABC$的外接球的体积不变

B. 三棱锥$D-ABC$的体积的最大值为$\frac{1}{3}$

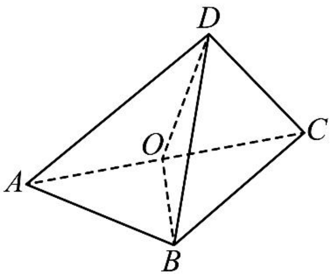
C. 当三棱锥$D-ABC$的体积最大时，二面角$D-BC-A$的正切值为 $2\sqrt{3}$

D. 异面直线 AB 与 CD 所成角的最大值为$90°$

【答案】ACD

【解答】

解：对于 A，设 AC 的中点为 O，则由$Rt\triangle ABC$、$Rt\triangle ADC$知，



$OA=OB=OC=OD$，所以 O 为三棱锥$D-ABC$外接球的球心，其半径为$\frac{1}{2}AC=1$，

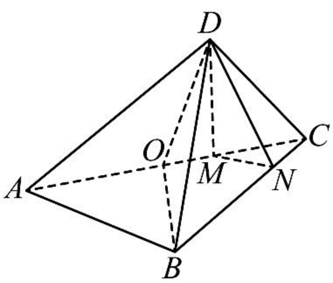
所以三棱锥$D-ABC$外接球的体积为$\frac{4}{3}\pi$，故 A 正确；

对于 B，设三棱锥$D-ABC$底面 ABC 上的高为 h，则$V_{D-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot h$，

当平面$ADC\perp$平面 ABC 时，三棱锥$D-ABC$的高最大，此时$h=\frac{1\times\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

此时三棱锥$D-ABC$的体积$V_{D-ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{4}$，故 B 错误；

对于 C，三棱锥$D-ABC$的体积最大时，平面$ADC\perp$平面 ABC，



过点 D 作$DM \perp AC$交 AC 于点 M，过点 M 作$MN//AB$，交 BC 于点 N，连接 DN，

由平面$ADC \perp$平面 ABC，平面$ADC \cap$平面$ABC = AC$，$DM \subset$平面 ADC，

所以$DM \perp$平面 ABC，而$BC \subset$平面 ABC，所以$DM \perp BC$，

又$MN//AB$，$AB \perp BC$，所以$MN \perp BC$，

因为$DM \cap MN = M$，$DM, MN \subset$平面 DMN，所以$BC \perp$平面 DMN，

又$DN \subset$平面 DMN，所以$BC \perp DN$，

所以$\angle DNM$即为二面角$D-BC-A$的平面角，

又$DM = \frac{AD \cdot DC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$，则$MC = \sqrt{DC^2 - DM^2} = \frac{1}{2}$，

又$\triangle CMN \backsim \triangle CAB$，所以$\frac{MN}{AB} = \frac{CM}{CA}$，则$MN = \frac{1}{4}$，

所以 $\tan\angle DNM = \frac{DM}{MN} = 2\sqrt{3}$，

即二面角$D-BC-A$的正切值为 $2\sqrt{3}$，故 C 正确；

对于 D，当翻折后点 D 到点 B 的距离为$\sqrt{2}$，即$BD = \sqrt{2}$，在$\triangle BCD$中，$BC^2 = BD^2 + CD^2$，

则$CD \perp BD$，又$CD \perp AD, AD \cap BD = D, AD, BD \subset$平面 ABD，则$CD \perp$平面 ABD，即异面直线 AB 与 CD 所成角为 $90°$，

即异面直线 AB 与 CD 所成角的最大值为$90°$，故 D 正确；

故选：ACD

三、填空题

9. 数学家欧拉 1707 年 4 月 15 日生于瑞士巴塞尔，1783 年 9 月 18 日卒于俄国圣彼得堡．他生于牧师家庭．15 岁在巴塞尔大学获学士学位，翌年得硕士学位．1727 年，欧拉应圣彼得堡科学院的邀请到俄国工作．1731 年接替丹尼尔·伯努利成为物理教授．他以旺盛的精力投入研究，在俄国的 14 年中，他在分析学、数论和力学方面作了大量出色的工作．1748 年，欧拉发现了复指数函数和三角函数的关系，并写出以下公式$e^{ix} = \cos x + i\sin x$(其中 i 为虚数单位)，这个公式在复变论中占有非常重要的地位，被誉为“数学中的天桥”．根据此公式，则$e^{i\pi} - 1 =$__________；$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^{2022} =$__________.

【答案】-2 ； -1

【解答】

解：$e^{i\pi} - 1 = \cos\pi + i\sin\pi - 1 = -2$.

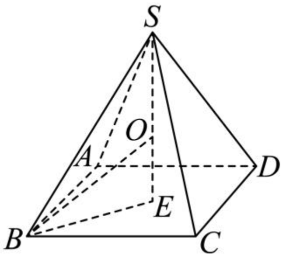
$$(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)^{2022} = (\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})^{2022} = (e^{\frac{\pi}{6}i})^{2022} = e^{337\pi i} = \cos(337\pi) + i\sin(337\pi)$$
$$= \cos(168 \times 2\pi + \pi) + i\sin(168 \times 2\pi + \pi) = \cos\pi + i\sin\pi = -1;$$

故答案为：$-2; -1$.

10. 在正四棱锥$S-ABCD$中，底面是边长为 2 的正方形，侧面是腰长为$\sqrt{6}$的等腰三角形，则正四棱锥$S-ABCD$的外接球的体积为

【解答】

解：如图所示



设外接球的球心为 O，半径为 R，底面中心为 E，连接 SE，BO，BE，

因为在正四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面是边长为 2 的正方形，侧面是腰长为 $\sqrt{6}$ 的等腰三角形，

所以 $BE=\sqrt{2}, SE=\sqrt{SB^2-BE^2}=2$，

在 $Rt\triangle BOE$ 中， $R^2=OE^2+BE^2$，即 $R^2=(2-R)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2$，

解得 $R=\frac{3}{2}$，所以外接球的体积为 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{9}{2}\pi$，

四、解答题

11. 已知复数$z_1=\frac{2m^2}{1-i}$，$z_2=(2+i)m-3(1+2i)$，$m\in R$，i 为虚数单位.

(1)若z_1+z_2是纯虚数，求实数 m 的值;

(2)若$z_1+z_2>0$，求$z_1\cdot z_2$的值.

【答案】解：(1)$z_1=\frac{2m^2}{1-i}=\frac{2m^2}{(1-i)(1+i)}=m^2(1+i)$，$z_2=(2+i)m-3(1+2i)=(2m-3)+(m-6)i$，

因为$z_1+z_2=(m^2+2m-3)+(m^2+m-6)i$是纯虚数，

所以$\begin{cases}m^2+2m-3=0\\m^2+m-6\neq 0\end{cases}$，解得$m=1$.

(2)因为$z_1+z_2=(m^2+2m-3)+(m^2+m-6)i>0$，则$\begin{cases}m^2+2m-3>0\\m^2+m-6=0\end{cases}$

解得$m=2$，此时$z_1=4(1+i)$，$z_2=1-4i$，所以$z_1\cdot z_2=4(1+i)(1-4i)=20-12i$.

12. 在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，且满足$(\sin B+2\sin C)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\sin B\cdot\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

(1)求角A;

(2)若D为BC的中点，且$AD=\sqrt{3}$,$\angle BAC$的角平分线交BC于点E，且$AE=\frac{1}{3}$，求边长a.

【答案】解：(1)因为 $(\sin B+2\sin C)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\sin B\cdot\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，

所以 $(\sin B+2\sin C)\cdot bc\cos A+\sin B\cdot ac\cos B=0$，

因为 $c\neq 0$，

所以 $(\sin B+2\sin C)\cdot b\cos A+\sin B\cdot a\cos B=0$，

所以由正弦定理得 $(\sin B+2\sin C)\cdot\sin B\cos A+\sin B\cdot\sin A\cos B=0$，

因为 $\sin B\neq 0$，所以 $(\sin B+2\sin C)\cos A+\sin A\cos B=0$，

所以 $\sin B\cos A+2\sin C\cos A+\sin A\cos B=0$，

所以 $\sin(A+B)+2\sin C\cos A=0$，所以 $\sin C+2\sin C\cos A=0$，

所以 $\sin C\neq 0$，所以 $\cos A=-\frac{1}{2}$，

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$；

(2)因为 $A=\frac{2\pi}{3}$，$\angle BAC$ 的角平分线交BC于点 E，

所以 $\angle BAE=\angle CAE=\frac{\pi}{3}$，

因为 $S_{\triangle ABE}+S_{\triangle CAE}=S_{\triangle ABC}$，

所以$\frac{1}{2}AB\cdot AE\sin\angle BAE+\frac{1}{2}AE\cdot AC\sin\angle CAE=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle BAC$，

所以$\frac{1}{3}c\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}b\sin\frac{\pi}{3}=bc\sin\frac{2\pi}{3}$，所以 $b+c=3bc$，

因为 D 为 BC 的中点，且 $AD=\sqrt{3}$，

所以 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

所以 $\overrightarrow{AD}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2$

$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2)$，

所以 $3=\frac{1}{4}(c^2+b^2+2bc\cos\frac{2\pi}{3})$，所以 $b^2+c^2-bc=12$，

所以 $(b+c)^2-3bc=12$，

所以 $(b+c)^2-(b+c)-12=0$，

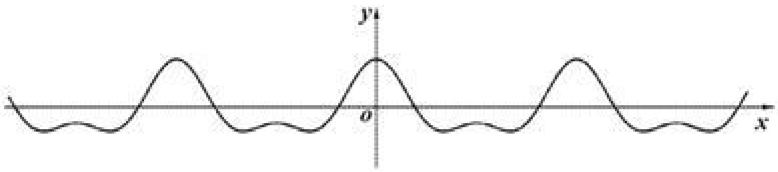
解得 $b+c=4$ 或 $b+c=-3$ (舍去)，

所以 $bc=\frac{4}{3}$,

所以由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2+bc=(b+c)^2-bc=16-\frac{4}{3}=\frac{44}{3}$，

所以 $a=\frac{2\sqrt{33}}{3}$.

13. 光波、电波、声波……，现实世界的波动现象无处不在．丰富多彩的波动现象大都可以用一族三角函数的叠加来刻画，已知某种波动现象对应的函数为$f(x)=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x$，其图象如下图所示．请你根据所学的数学知识，回答下列问题．



(1)求$f(x)$的最小值，及取到最小值时x的取值集合；

(2)探究$f(x)$在$\left(1,\frac{5\pi}{3}\right)$是否存在零点，并说明理由．

【答案】解：(1)$f(x)=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x=\cos x+\frac{1}{2}(2\cos^2 x-1)=\cos^2 x+\cos x-\frac{1}{2}$.令$t=\cos x$，则$t\in[-1,1]$，

$y=t^2+t-\frac{1}{2}=(t+\frac{1}{2})^2-\frac{3}{4}$在$[-1,-\frac{1}{2}]$单调递减，

在$[-\frac{1}{2},1]$单调递增，

故$y_{\min}=y|_{t=-\frac{1}{2}}=-\frac{3}{4}$,

此时$t=\cos x=-\frac{1}{2}$，即$x\in\{x|x=2k\pi+\frac{2\pi}{3}$或$x=2k\pi+\frac{4\pi}{3}$，$k\in Z\}$.

(2)$f(1)=\cos 1+\frac{1}{2}\cos 2$，由$y=\cos x$在$(0,\pi)$单调递减，

可知$\cos 1>\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}\cos 2>\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3}>-\frac{1}{4}$,

故$f(1)=\cos 1+\frac{1}{2}\cos 2>\frac{1}{2}-\frac{1}{4}>0$，

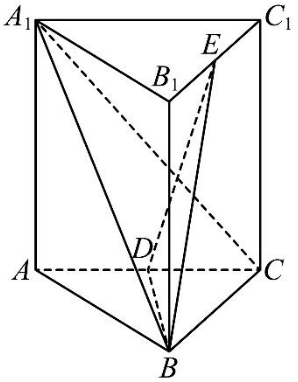
$f(\frac{5\pi}{3})=\cos\frac{5\pi}{3}+\frac{1}{2}\cos\frac{10\pi}{3}=\frac{1}{4}>0$，

$f(\pi)=\cos\pi+\frac{1}{2}\cos 2\pi=-\frac{1}{2}<0$，

$f(x)$的图象在$(1,\frac{5\pi}{3})$连续，且$f(1)\cdot f(\pi)<0$，

由零点判定定理可知，$f(x)$在区间$(1,\frac{5\pi}{3})$存在零点．

14. 如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，平面$A_1BC\perp$平面AA_1B_1B.



(1)求证：$\triangle ABC$为直角三角形；

(2)设点 D，E 分别为棱 AC，B_1C_1 的中点，若二面角 A_1-BC-A 的大小为 $45°$，且 $AB=BC=2$，求直线 BC 与平面 BDE 所成角的正弦值.

【答案】解：(1)因为 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直三棱柱，

则 $AA_1\perp$ 平面 ABC，且 $BC\subset$ 平面 ABC，可得 $AA_1\perp BC$，

过点 A 作 $AG\perp A_1B$，垂足为 G，

又因为平面 $A_1BC\perp$ 平面 AA_1B_1B，平面 $A_1BC\cap$ 平面 $AA_1B_1B=A_1B$， $AG\subset$ 平面 AA_1B_1B，

可得 $AG\perp$ 平面 A_1BC，

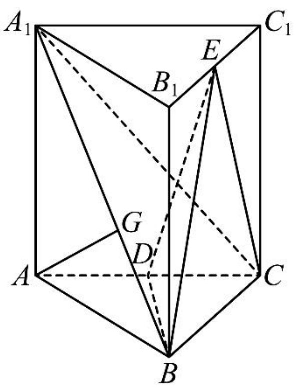
且 $BC\subset$ 平面 A_1BC，可得 $AG\perp BC$，

又 $AA_1\perp BC$，$AG\cap AA_1=A$，$AG\subset$ 平面 AA_1B_1B，$AA_1\subset$ 平面 AA_1B_1B，

所以 $BC\perp$ 平面 AA_1B_1B，

因为 $AB\subset$ 平面 AA_1B_1B，所以 $BC\perp AB$，

所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形.



(2)由(1)可知： $BC\perp$ 平面 AA_1B_1B， $AB,A_1B\subset$ 平面 AA_1B_1B，

所以 $BC\perp AB$， $BC\perp A_1B$，

则 $\angle A_1BA$ 即为二面角 A_1-BC-A 的平面角，可得 $\angle A_1BA=45°$，

所以 $AA_1=AB=BC=2$，

设点 C 到平面 BDE 的距离为 d，直线 BC 与平面 BDE 所成角为 θ，

可得 $DA=DB=DC=\sqrt{2}$， $BE=DE=\sqrt{5}$，

则 $S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times2\times2=1$， $S_{\triangle BDE}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{5-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}$，

因为 $V_{E-BCD}=V_{C-BDE}$，则 $\frac{1}{3}\times S_{\triangle BCD}\times BB_1=\frac{1}{3}\times S_{\triangle BDE}\times d$，

即 $\frac{1}{3}\times1\times2=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times d$，解得 $d=\frac{4}{3}$，可得 $\sin\theta=\frac{d}{BC}=\frac{2}{3}$，

所以直线 BC 与平面 BDE 所成角的正弦值为 $\frac{2}{3}$.