微专题　空间几何体的表面积、体积问题

技巧1：空间几何体表面积体积问题：图形分析、直接计算法

（1）通过分析图形元素之间的数量关系，求出计算面积或体积所需要的相关要素；

（2）割与补、等体积变换是处理体积问题的常用思想；

（3）常用同一个几何体体积不变，转换顶点的方法求点到平面的距离；

技巧2：1．几个与球有关的切、接常用结论

（1）设正方体的棱长为a，球的半径为R，

①正方体的外接球，则$2R=\sqrt{3}a$；　　②正方体的内切球，则$2R=a$；

③球与正方体的各棱相切，则$2R=\sqrt{2}a$．

（2）长方体的同一顶点的三条棱长分别为a，b，c，外接球的半径为R，则$2R=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$．

（3）正四面体的外接球与内切球的半径之比为3∶1.

（4）面面垂直模型外接球公式：$R^2={R_1}^2+{R_2}^2-\dfrac{l^2}{4}$

（5）内切球公式：$R=\dfrac{3V}{S_{表面积}}$

2．旋转体侧面积问题中的转化思想

（1）计算旋转体的侧面积时，一般采用转化的方法来进行，即将侧面展开化为平面图形，“化曲为直”来解决，因此要熟悉常见旋转体的侧面展开图的形状及平面图形面积的求法.

（2）折叠问题中的平行与垂直关系的处理关键是结合图形弄清折叠前后变与不变的数量关系，尤其是隐含着的垂直关系.

命题方向1——圆柱

例1：（1）已知圆柱的底面半径为1，母线长与底面的直径相等，则该圆柱的表面积为______

（2）设甲、乙两个圆柱的底面分别为S_1，S_2，体积分别为V_1，V_2，若它们的侧面积相等，且$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{9}{4}$，则$\dfrac{V_1}{V_2}$的值是_____

（3）表面积为12π的圆柱，当其体积最大时，该圆柱的底面半径与高的比为_____

（4）已知正三棱柱的各条棱长均为a，圆柱的底面直径和高均为b，若它们的体积相等，则$a^3:b^3$的值为_____

解：（1）6π；　（2）$\dfrac{3}{2}$；　（3）$\dfrac{1}{2}$；　（4）$\pi:\sqrt{3}$

命题方向2——圆锥

例2：（1）将一个圆锥的侧面沿一条母线剪开，其展开图是半径为2的半圆，则该圆锥的高为____

（2）已知圆锥的底面半径为$\sqrt{2}$，其侧面展开图为一个半圆，则该圆锥的母线长为（　　）

A．2　　B．$2\sqrt{2}$　　C．4　　D．$4\sqrt{2}$

（3）圆锥的侧面展开图是一个半径为3，圆心角为120^o的扇形，则此圆锥的高为_____

（4）若圆锥的母线长$10cm$，侧面积为$60\pi\ cm^2$，则此圆锥的体积为_____　cm^3。

（5）若一个圆锥的底面半径为1，侧面积是底面积的2倍，则该圆锥的体积为_____

（6）已知圆锥的高为h，底面半径为r，且$h:r=2:1$，圆锥的体积$V=18\pi$，则该圆锥的表面积为(　　)

A.$18\sqrt{5}\pi$　　B.$9(1+2\sqrt{5})\pi$　　C.$9\sqrt{5}\pi$　　D.$9(1+\sqrt{5})\pi$

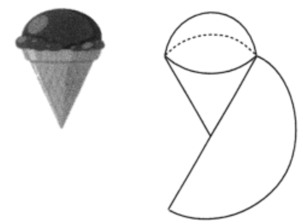
（7）甲、乙两个圆锥的母线长相等，侧面展开图的圆心角之和为2π，侧面积分别为$S_甲$和$S_乙$，体积分别为$V_甲$和$V_乙$．若$\dfrac{S_甲}{S_乙}=2$，则$\dfrac{V_甲}{V_乙}=$（　　）

A．$\sqrt{5}$　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{10}$　　D．$\dfrac{5\sqrt{10}}{4}$

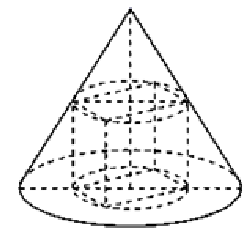
（8）冰激凌一直被众多青少年视为夏日解暑神器，图中冰激凌可近似地看作圆锥和半球的组合体，若圆锥部分的侧面展开图是面积为$\dfrac{9\pi}{2}\text{cm}^2$的半圆形，则该冰激凌的体积为（　　）

A．$\dfrac{18+9\sqrt{3}}{8}\pi\text{cm}^3$　　B．$\dfrac{9+18\sqrt{3}}{8}\pi\text{cm}^3$

C．$\dfrac{9+9\sqrt{3}}{4}\pi\text{cm}^3$　　D．$\dfrac{9+6\sqrt{3}}{4}\pi\text{cm}^3$



（9）学生到工厂劳动实践，利用3D打印技术制作模型．如图，该模型为在圆锥底部挖去一个正方体后的剩余部分（正方体四个顶点在圆锥母线上，四个顶点在圆惟底面上），圆锥底面直径为$10\sqrt{2}\,\text{cm}$，高为10*cm*.打印所用部料密度为0.9g/cm^3．不考虑打印损耗．制作该模型所需原料的质量为________g.（取$\pi=3.14$，精确到0.1）

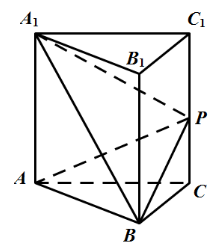


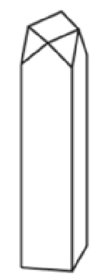
解：（1）$\sqrt{3}$；　（2）B；　（3）$2\sqrt{2}$；　（4）96π；　（5）$\dfrac{\sqrt{3}\pi}{3}$；

（6）D；　（7）C；　（8）A；　（9）358.5

命题方向3——棱柱

例3：（1）如下图，在正三棱柱$ABC\text{-}A_1B_1C_1$中，已知$AB=AA_1=3$，点P在棱CC_1上，则三棱锥$P\text{-}ABA_1$的体积为________.





（2）某校开展社会实践活动，学生到工厂制作一批景观灯箱(如上图，在直四棱柱上加工，所有顶点都在棱上)，灯箱最上面是正方形，与之相邻的四个面都是全等的正三角形，灯箱底部是边长为a的正方形，灯箱的高度为10a，则该灯箱的体积为（　　）

A．$10a^3$　　B．$\dfrac{59}{6}a^3$　　C．$\dfrac{119}{12}a^3$　　D．$\dfrac{239}{24}a^3$

解：（1）$\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$；　（2）C

命题方向 4——棱锥

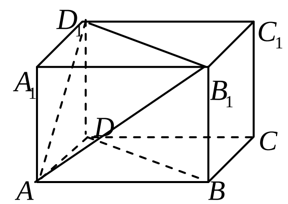
例 4：（1）已知正四棱锥的底面边长是 6，高为 $\sqrt{7}$，这个正四棱锥的侧面积是_______

（2）底面边长为 2m，高为 1m 的正三棱锥的全面积为______ m^2。

（3）已知正三棱锥的体积为 $9\sqrt{3}\ \ cm^3$，高为 $3cm$，则它的侧面积为_____ cm^2。

（4）在侧棱长为 $2\sqrt{3}$ 的正三棱锥 $V-ABC$ 中，$\angle AVB=\angle BVC=\angle CVA=40^o$，一只蚂蚁从点 A 出发，沿着正三棱锥的侧面爬行一周回到 A 点，则蚂蚁爬行的最短路程为_____

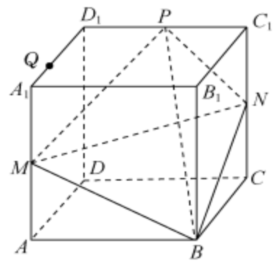
解：（1）48； （2）$3\sqrt{3}$； （3）$18\sqrt{3}$； （4）6



练习：（1）如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=AD=3\text{cm}$，$AA_1=2\text{cm}$，

则四棱锥 $A-BB_1D_1D$ 的体积为________cm³.

变式：上题中若求三棱锥 $A-B_1D_1D$ 的体积呢？



（2）（多选题）如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

M，N，P 分别是 AA_1，CC_1，C_1D_1 的中点，Q 是线段 D_1A_1 上的动点，

则（ ）

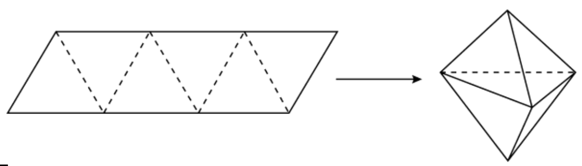
A．存在点 Q，使 B，N，P，Q 四点共面　　B．存在点 Q，使 PQ // 平面 MBN

C．三棱锥 $P-MBN$ 的体积为 $\frac{1}{3}$　　D．经过 C，M，B，N 四点的球的表面积为 $\frac{9\pi}{2}$

（3）正多面体共有 5 种，统称为柏拉图体，它们分别是正四面体、正六面体(即正方体)、正八面体、正十二面体、正二十面体．连接正方体中相邻面的中心，可以得到另一个柏拉图体．已知该柏拉图体的体积为 $\frac{32}{3}$，则生成它的正方体的棱长为（ ）

A．2　　B．$2\sqrt[3]{2}$　　C．$2\sqrt[4]{2}$　　D．4

（4）农历五月初五是端午节，民间有吃粽子的习惯，粽子又称粽粑，俗称"粽子"，古称"角黍"，是端午节大家都会品尝的食品，传说这是为了纪念战国时期楚国大臣、爱国主义诗人屈原．如图，平行四边形形状的纸片是由六个边长为 1 的正三角形构成的，将它沿虚线折起来，可以得到如图所示粽子形状的六面体，则该六面体的体积为________；若该六面体内有一球，则该球体积的最大值为________.



解：（1）6； （2）ABC； （3）D； （4）$\frac{\sqrt{2}}{6}$，$\frac{8\sqrt{6}\pi}{729}$

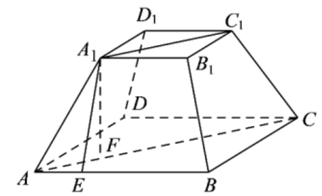
命题方向 5——台体

例 5：（1）南水北调工程缓解了北方一些地区水资源短缺问题，其中一部分水蓄入某水库.已知该水库水位为海拔 148.5m 时，相应水面的面积为 140.0km^2；水位为海拔 157.5m 时，相应水面的面积为 180.0km^2，将该水库在这两个水位间的形状看作一个棱台，则该水库水位从海拔 148.5m 上升到 157.5m 时，增加的水量约为（$\sqrt{7}\approx 2.65$）（ ）

A. $1.0\times 10^9\text{m}^3$　　B. $1.2\times 10^9\text{m}^3$　　C. $1.4\times 10^9\text{m}^3$　　D. $1.6\times 10^9\text{m}^3$

（2）在《九章算术 商功》中将正四面形棱台体(棱台的上、下底面均为正方形)称为方亭．在方亭 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2A_1B_1=4$，四个侧面均为全等的等腰梯形且面积之和为 $12\sqrt{2}$，则该方亭的体积为( )

A. $\frac{28\sqrt{2}}{3}$　　B. $\frac{28}{3}$　　C. $\frac{14\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{14}{3}$

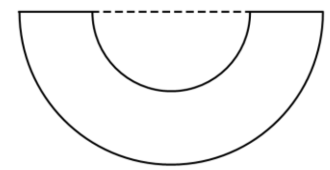


（3）圆台上、下底面的圆周都在一个直径为 10 的球面上，其上、下底面半径分别为 4 和 5，则该圆台的体积为______.

（4）下图是一个圆台的侧面展开图，若两个半圆的半径分别是 1 和 2，则该圆台的体积是（ ）

A. $\frac{7\sqrt{2}\pi}{24}$　　B. $\frac{7\sqrt{3}\pi}{24}$

C. $\frac{7\sqrt{2}\pi}{12}$　　D. $\frac{7\sqrt{3}\pi}{12}$



（5）（多选题）

小淘气找到了一支粉笔，测量后发现该粉笔的形状恰好是正六棱台 $ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$（正六棱台：棱台的上下底面均为正六边形，所有侧棱延长后交于一点，该点在棱台上、下底面的投影为分别为上、下底面的中心），棱台的高为 h，若 $h=10$，$AB=4$，$A_1B_1=3$（单位：mm），不考虑其它因素，则

A．粉笔的体积为 $145\sqrt{3}\ \text{mm}^3$

B．若小淘气将该粉笔磨成一个体积最大的正六棱锥，则该棱锥的体积为 $80\sqrt{3}\ \text{mm}^3$

C．若小淘气将该粉笔磨成一个体积最大的圆锥，则该圆锥的侧面积为 $8\sqrt{21}\pi\ \text{mm}^2$

D．若小淘气将该粉笔磨成一个体积最大的球，则该球的半径为 3 mm

（6）（多选题）已知圆台 OO_1 上、下底面的半径分别为 2 和 4，母线长为 4．正四棱台上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的四个顶点在圆台上底面圆周上，下底面 $ABCD$ 的四个顶点在圆台下底面圆周上，则

A．AA_1 与底面所成的角为 60°

B．二面角 A_1-AB-C 小于 60°

C．正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的外接球的表面积为 64π

D．设圆台 OO_1 的体积为 V_1，正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 V_2，则 $\frac{V_1}{V_2}=\pi$

解：（1）C；（2）B； （3）61π； （4）B； （5）BC； （6）AC

命题方向 6——球

$\boxed{\text{例 5}}$：（1）已知 A，B，C 是半径为 3 的球 O 的球面上的三个点，且 $\angle ACB=120°$，$AB=\sqrt{3}$，$AC+BC=2$，则三棱锥 $O—ABC$ 的体积为

A．$\frac{\sqrt{6}}{12}$ B．$\frac{\sqrt{6}}{6}$ C．$\frac{\sqrt{6}}{3}$ D．$\sqrt{6}$

（2）三棱锥 $P-ABC$ 中，PA,PB,PC 两两垂直，$PA=1,PB=\sqrt{6},PC=3$，则此三棱锥外接球的体积为______

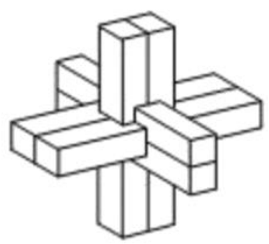
（3）在正三棱锥 $S-ABC$ 中，M,N 分别是棱 SC,BC 的中点，且 $MN\perp AM$，若侧棱 $SA=2\sqrt{3}$，则此正三棱锥 $S-ABC$ 的外接球的表面积是_____

（4）平面 α 截半径为 2 的球 O 所得的截面圆的面积为 π，则球心 O 到平面 α 的距离为____

（5）"中国天眼"是我国具有自主知识产权，世界最大单口径，最灵敏 的球面射电望远镜（如图）. 其反射面的形状为球冠（球冠是球面被平面所截后剩下的曲面，截得的圆为底，垂直于圆面的直径被截得的部分为高，球冠面积 $S=2\pi Rh$，其中 R 为球的半径，h 为球冠的高)，设球冠底的半径为 r，周长为 C，球冠的面积为 S，则当 $C=2\pi,S=16\pi$ 时，$\frac{r}{R}=$（ ）

A．$\frac{\sqrt{2\sqrt{257}+2}}{16}$ B．$\frac{\sqrt{15}}{8}$

C．$\frac{\sqrt{2\sqrt{257}-2}}{16}$ D．$\frac{\sqrt{13}}{8}$



（6）鲁班锁是中国传统的智力玩具，起源于中国古代建筑中首创的榫卯 结构，它的外观是如图所示的十字立方体，其上下、左右、前后完全对称，六根等长的正四棱柱分成三组，经 $90°$ 榫卯起来. 若正四棱柱的高为 5，底面正方形的边长为 1，现将该鲁班锁放进一个球形容器内，则该球形容器的表面积的最小值为__________.（容器壁的厚度忽略不计，结果保留 π）

（7）（多选题）已知甲烷的化学式为 CH_4，其结构式可看成一个正四面体，其中四个氢原子位于正四面体的四个顶点处，而碳原子恰好在这个正四面体的中心，碳原子与每个氢原子之间均有化学键相连，若把每个原子看成一个质点，两个氢原子之间的距离为 1，则( )

A. 碳原子与氢原子之间的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$ B. 正四面体外接球的体积为 $\frac{3\pi}{2}$

C. 正四面体的体积为 $\frac{\sqrt{2}}{12}$ D. 任意两个碳氢化学键的夹角的余弦值为 $-\frac{1}{3}$

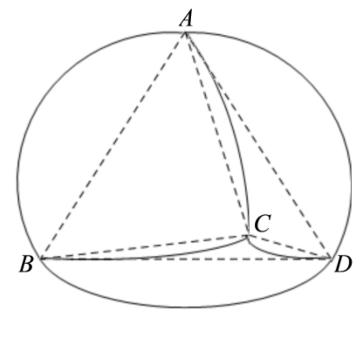
（8）（多选题）数学中有许多形状优美、寓意独特的几何体，"勒洛四面体"就是其中之一．勒洛四面体是以正四面体的四个顶点为球心，以正四面体的棱长为半径的四个球的公共部分．如图，在勒洛四面体中，正四面体 $ABCD$ 的棱长为 4，则下列结论正确的是（ ）

A. 若 P，Q 是勒洛四面体 $ABCD$ 表面上的任意两点，则 PQ 的最大值是 4

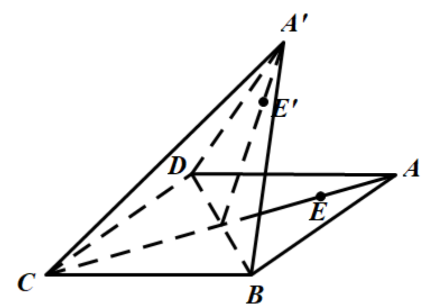
B. 勒洛四面体 $ABCD$ 被平面 ABC 截得的截面面积是 $8(\pi-\sqrt{3})$

C. 勒洛四面体 $ABCD$ 的体积是 $8\sqrt{6}\pi$

D. 勒洛四面体 $ABCD$ 内切球的半径是 $4-\sqrt{6}$



（9）已知菱形 $ABCD$ 边长为 3，$\angle BAD=60°$，E 为对角线 AC 上一点，$AC=6AE$. 将 $\triangle ABD$ 沿 BD 翻折到 $\triangle A'BD$ 的位置，E 记为 E' 且二面角 $A'-BD-C$ 的大小为 120°，则三棱锥 $A'-BCD$ 的外接球的半径为______；过 E' 作平面 α 与该外接球相交，所得截面面积的最小值为______.



解：（1）B； （2）$\frac{32\pi}{3}$； （3）36π； （4）$\sqrt{3}$； （5）B；

（6）30π； （7）ACD； （8）ACD； （9）$\frac{\sqrt{2}}{6}$， $\frac{8\sqrt{6}\pi}{729}$

微专题　外接球与内切球

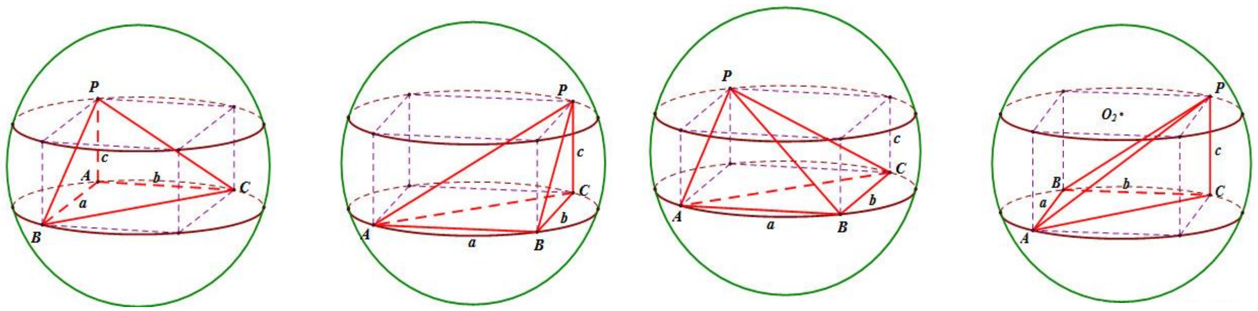
一、外接球 8 大模型秒杀公式及推导

说明： r 是底面外接圆的半径，R 为球的半径，l 为两面公共边的长度，
α 为两个面的二面角，h 是空间几何体的高，H 为某一面的高。

1. 墙角模型（长方体模型）

（1）使用范围：3 组或 3 条棱两两垂直；或可在长方体中画出该图且各顶点与长方体的顶点重合

（2）图示过程



（3）推导过程：长方体的体对角线就是外接球的直径

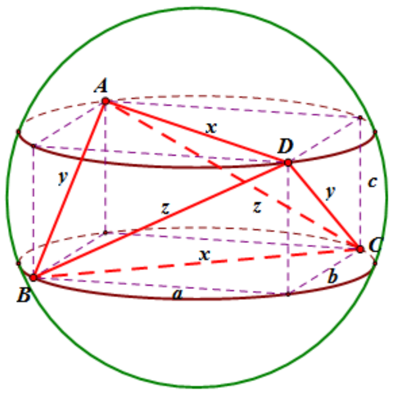
（4）解题流程：先补成长方体，再找长方体的长宽高 a,b,c

（5）秒杀公式：$\boxed{R^2=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4}}$　（a,b,c 为长方体的长宽高），$R^2=\dfrac{3a^2}{4}$（a 为正方体的边长）

2. 对棱体模型

（1）使用范围：对棱相等的三棱锥（也是特殊的长方体模型）

（2）图示过程



（3）推导过程：设 3 组对棱的长度分别为 x、y、z，

长方体的长宽高分别为 a、b、c

$$\begin{cases} x^2=a^2+b^2 \\ y^2=b^2+c^2 \\ z^2=a^2+c^2 \end{cases} \Rightarrow R^2=\frac{x^2+y^2+z^2}{8}$$

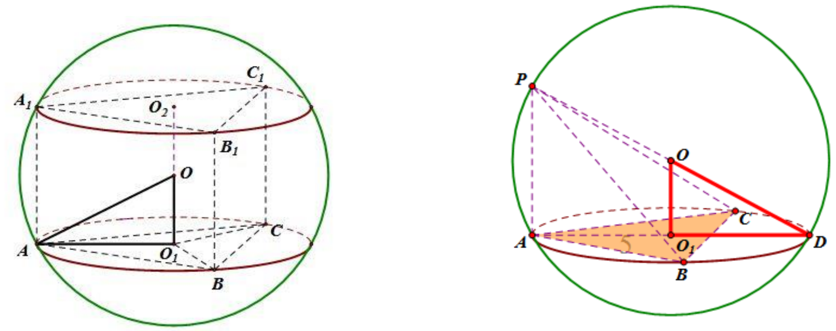
（4）解题流程：先补成长方体，再找长方体的三对面对角线 x、y、z

（5）秒杀公式：$\boxed{R^2=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{8}}$

3. 汉堡模型

（1）使用范围：有一条侧棱垂直于底面的柱体或椎体

（2）图示过程



（3）推导过程

第一步：取底面的外心 O_1，过外心作高的平行线且长度相等，在该线上中点为球心的位置

第二步：根据勾股定理可得 $R^2=r^2+\dfrac{h^2}{4}$

（4）解题流程：找底面外接圆半径 r，找高 h

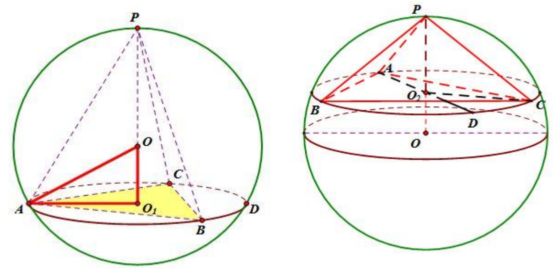
（5）秒杀公式：$\boxed{R^2=r^2+\dfrac{h^2}{4}}$　（r 为底面外接圆半径，h 为几何体的高）

4. 斗笠模型

（1）使用范围：正棱锥或顶点的投影在底面的外心上

正棱锥外接球半径：$\boxed{R=\dfrac{b^2}{2h}}$　（b 为侧棱长，h 为棱锥的高）

（2）图示过程



（3）推导过程

第一步：取底面的外心 O_1，连接顶点与外心，该线为空间几何体的高 h

第二步：在高上取一点作为球心 O

第三步：根据勾股定理 $R^2=(h-R)^2+r^2 \Leftrightarrow R=\dfrac{r^2+h^2}{2h}$

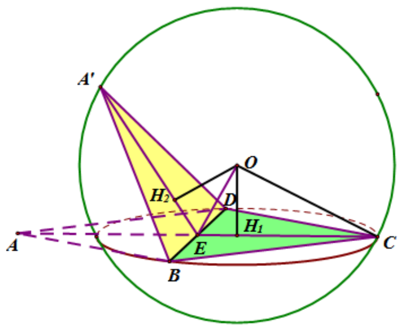
（4）解题流程：找底面外接圆半径 r，找高 h

（5）秒杀公式：$\boxed{R=\dfrac{r^2+h^2}{2h}}$　（r 为底面外接圆半径，h 为几何体的高）

5. 怀表模型（折叠模型）

（1）使用范围：两个全等三角形或等腰三角形拼在一起，
或菱形折叠

（2）图示过程



（3）推导过程

第一步：过两个平面取其外心 H_1，H_2，分别过两个外心作这两个面的垂线且垂线相交于球心 O

第二步：计算 $OH_1^2 = H_1E^2 \bullet \tan^2\dfrac{\alpha}{2} = (CE - CH_1)^2\tan^2\dfrac{\alpha}{2} = (H-r)\tan^2\dfrac{\alpha}{2}$

第三步：$OC^2 = OH_1^2 + CH_1^2 = (H-r)^2\tan^2\dfrac{\alpha}{2} + r^2$

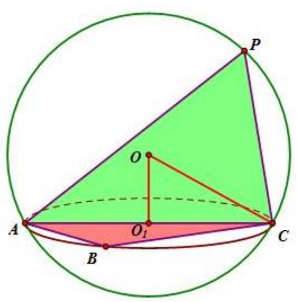
（4）解题流程：找等腰三角形底边上的高 H，找底面外接圆半径 r，找二面角 α

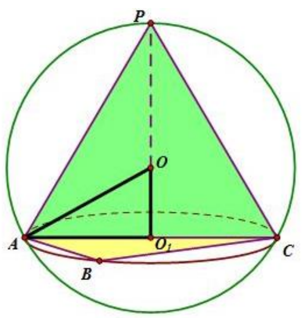
（5）秒杀技巧：$\boxed{R^2 = (H-r)^2\tan^2\dfrac{\alpha}{2} + r^2}$ （H 为底边上的高，r 为底面外接圆半径，α 为二面角）

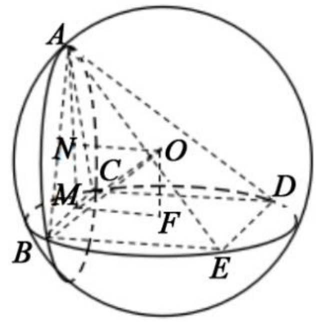
6. 切瓜模型

（1）使用范围：有两个平面互相垂直的棱锥或存在一组邻面垂直的几何体

（4）图示过程







（3）推导过程：

第一步：分别在两个互相垂直的平面上取外接圆圆心 F、N，其半径分别为 R_1, R_2，过两个外心作两个垂面的垂线，两条垂线的交点即为球心 O，取 BC 的中点为 M，连接 FM、MN、OF、ON

第二步：$ONFM$ 为矩形，由勾股定理得 $R^2 = OA^2 = AN^2 + ON^2 = AN^2 + MF^2 = R_1^2 + R_2^2 - \dfrac{l^2}{4}$

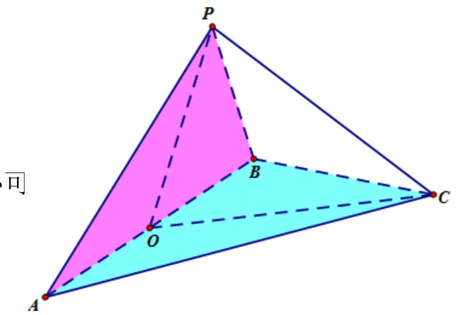
（4）解题流程：找两个垂面外接圆半径 R_1，R_2，找两个面的交线 l

（5）秒杀公式：$\boxed{R^2 = R_1^2 + R_2^2 - \dfrac{l^2}{4}}$ （R_1，R_2 为两垂直平面外接圆半径，l 为两面公共边长）

7. 矩形模型

（1）使用范围：棱锥有两个平面为直角三角形且斜边为同一边

（2）图示过程

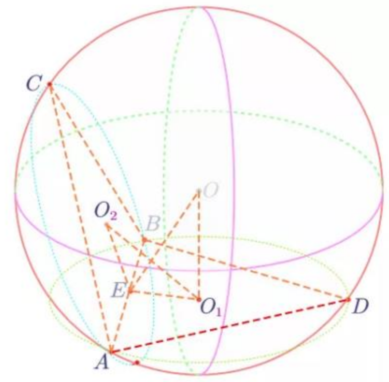


（3）推导过程：

根据球的定义可知一个点到各个顶点的距离相等该点为球心可

（4）解题流程： 找两个直角三角形的公共斜边长 l

（5）秒杀公式：$\boxed{R^2 = \dfrac{l^2}{4}}$ （l 为公共斜边长）



8. 终极公式（鳄鱼模型）

（1）使用范围：适用任意普通情况

（2）图示过程

（3）推导过程：

第一步：在两个平面上分别找外心 O_1、O_2

且过两外心做这两面的垂线相交于球心O

第二步：$\because O_1OO_2E$ 四点共圆，$\therefore$ 正弦定理可得 $OE = 2r = \dfrac{|O_1O_2|}{\sin\alpha}$ （1）

在 ΔO_1O_2E 中，$|O_1O_2|^2 = |O_2E|^2 + |O_1E|^2 - 2|O_2E||O_1E|\cos\alpha$ （2）

$|OD|^2 = |O_1O|^2 + |O_1D|^2$ （3）

第三步：由（1）（2）（3）整理可得

$$|OD|^2 = |O_1O|^2 + |O_1D|^2 = |OE|^2 - |O_1E|^2 + |O_1D|^2 = \frac{|O_1O_2|^2}{\sin^2\alpha} - |O_1E|^2 + |O_1D|^2$$

$$= \frac{|O_2E|^2 + |O_1E|^2 - 2|O_2E||O_1E|\cos\alpha}{\sin^2\alpha} - |O_1E|^2 + |O_1D|^2$$

$$= \frac{|O_2E|^2 + |O_1E|^2 - 2|O_2E||O_1E|\cos\alpha}{\sin^2\alpha} - |O_1E|^2 + |O_1B|^2$$

第四步：设 $|O_2E| = m, |O_1E| = n, |AB| = l$，两个面的二面角为 α，

由第三步可得 $R^2 = \dfrac{m^2 + n^2 - 2mn\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \dfrac{l^2}{4}$

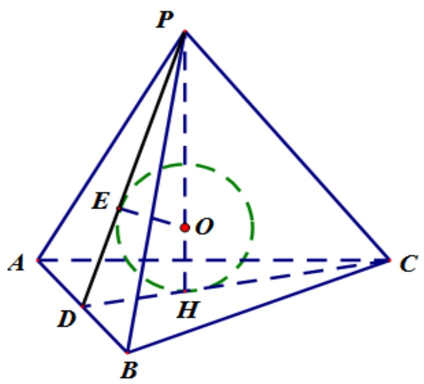
（4）解题流程：找两相邻面的截面外接圆圆心到交线的距离 m、n，找二面角 α，找两面的交线 l

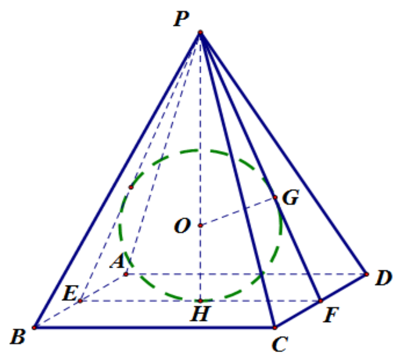
（5）秒杀公式：$\boxed{R^2 = \dfrac{m^2 + n^2 - 2mn\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \dfrac{l^2}{4}}$

二、内切球的半径

方法 1：等体积法

（1）图示过程





（2）推导过程：以三棱锥 $P-ABC$ 为例

$$\mathbf{V_{P-ABC}=\frac{1}{3}S_{底面}h=\frac{1}{3}RS_{\Delta PAB}+\frac{1}{3}RS_{\Delta PAC}+\frac{1}{3}RS_{\Delta PBC}+\frac{1}{3}RS_{\Delta ABC}}$$

$$\mathbf{=\frac{1}{3}R(S_{\Delta PAB}+S_{\Delta PAC}+S_{\Delta PBC}+S_{\Delta ABC})=\frac{1}{3}RS_{表面积}} \qquad \therefore \mathbf{R=\frac{3V_{几何体}}{S_{表面积}}}$$

（3）秒杀公式：$\boxed{\mathbf{R=\frac{3V_{几何体}}{S_{表面积}}}}$

方法 2：相似三角形法

如上左图，

第一步：先作出内切球的截面图，H 是三角形 ΔABC 的外心；

第二步：求出 $DH=\frac{1}{3}CD$，$PO=PH-r$，PD 是侧面 ΔABP 的高；

第三步：由 $\Delta POE\sim\Delta PDH$，建立等式：$\frac{OE}{DH}=\frac{PO}{PD}$，解出 R