江苏省高邮中学、江苏省仪征中学

2023-2024 学年度第二学期高一 4 月期中联合测试数学试卷

命题单位：江苏省高邮中学　　　命题人：叶 超 季长征 吴国璨

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知 $z(1-i)=1+i$，则 $|z|=$（　）

A．$2\sqrt{2}$　　B．2　　C．1　　D．$\dfrac{1}{2}$

2．$\cos10°\sin70°-\sin170°\sin20°=$（　）

A．$-\dfrac{1}{2}$　　B．$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3．函数 $f(x)=2\lg x+2x-5$ 的零点所在区间是（　）

A．$(0,1)$　　B．$\left(\dfrac{3}{2},2\right)$　　C．$\left(2,\dfrac{5}{2}\right)$　　D．$\left(\dfrac{5}{2},3\right)$

4．在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$AD=2$，$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$，$\overrightarrow{CE}=3\overrightarrow{ED}$，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}=$（　）

A．6　　B．-1　　C．-3　　D．-9

5．记 S 为 $\triangle ABC$ 的面积．已知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+S=0$，则 $\sin2A+\cos2A=$（　）

A．$-\dfrac{7}{5}$　　B．1　　C．-1　　D．$\dfrac{3}{2}$

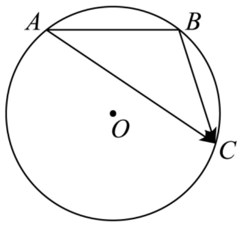
6．如图，圆 O 半径为 1，弦长 $AB=1$，C 为圆 O 上一动点，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$ 取值范围是（　）

A．$[0,1]$

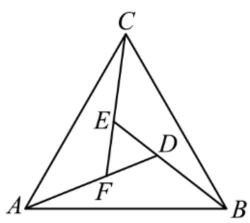
B．$\left[\dfrac{5}{4}-\sqrt{3},\dfrac{5}{4}+\sqrt{3}\right]$

C．$\left[\dfrac{3}{2}-\sqrt{3},\dfrac{3}{2}+\sqrt{3}\right]$

D．$\left[\dfrac{7}{4}-\sqrt{3},\dfrac{7}{4}+\sqrt{3}\right]$



（第 6 题图）



（第 7 题图）

7．已知 $\triangle ABD$、$\triangle BCE$、$\triangle CAF$ 是三个全等的三角形，用此三个三角形拼成如图所示的两个等边三角形 $\triangle ABC$、$\triangle DEF$．若 $AC=7$，$\cos\angle ABD=\dfrac{11}{14}$，则 $EF=$（　）

A．$2\sqrt{3}$　　B．1　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

8．已知$\triangle ABC$中，$AB=AC=4\sqrt{2}$, $\left|\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BC}\right|_{\min}=4(\lambda\in R)$，$M$为线段$AB$靠近$B$点的三等分点. 若$\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{2}\sin^2\alpha\cdot\overrightarrow{AM}+\cos^2\alpha\cdot\overrightarrow{AC}\left(\alpha\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]\right)$，则$\left|\overrightarrow{MP}\right|$的最小值为（　）

A．$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　　B．$\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$　　C．$\dfrac{4}{3}$　　D．$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9．下列结论正确的是（　）

A．所有单位向量均相等

B．向量$\vec{a}$，$\vec{b}$均为单位向量，若$\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|=2$，则$\vec{a}$在$\vec{b}$方向上的投影向量为$\dfrac{1}{4}\vec{b}$

C．若$AB=2\sqrt{2}$, $B=\dfrac{\pi}{4}$, $AC=3$，则满足条件的三角形有且只有一个

D．复数集中, 若纯虚数z满足$\left|z-2\right|=1$，则z有且仅有两解

10．已知α, β为锐角，$\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos 2\alpha=-\dfrac{4}{5}$，则（　）

A．$\sin 2\alpha=\dfrac{3}{5}$

B．$\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{11\sqrt{5}}{25}$

C．$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{\sqrt{5}}{25}$

D．$\tan\alpha\tan\beta=21$

11．材料 1：三角形的外心、重心、垂心依次位于同一直线上，且重心到外心的距离是重心到垂心距离的一半. 该直线被称为“欧拉线”.

材料 2：已知P是$\triangle ABC$内一点，若$\triangle BPC$，$\triangle APC$，$\triangle APB$的面积分别为S_A，S_B，S_C，则$S_A\cdot\overrightarrow{PA}+S_B\cdot\overrightarrow{PB}+S_C\cdot\overrightarrow{PC}=\vec{0}$. 该结论被称为“奔驰定理”.

已知点G、H、O、I分别为$\triangle ABC$的重心、垂心、外心和内心，则下列结论正确的是（　）

A．$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

B．若$\overrightarrow{AI}=\lambda\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\sin 2B}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\sin 2C}\right)(\lambda\neq 0)$，则$\triangle ABC$为等腰三角形

C．$\overrightarrow{OA}\cdot\sin 2A+\overrightarrow{OB}\cdot\sin 2B+\overrightarrow{OC}\cdot\sin 2C=\vec{0}$

D．若$4\overrightarrow{HA}+5\overrightarrow{HB}+6\overrightarrow{HC}=\vec{0}$，则$\cos\angle BHC=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.把答案填写在答题卡的横线上.

12． $\tan 15^{\circ}+\tan 45^{\circ}+\sqrt{3}\tan 15^{\circ}\cdot\tan 45^{\circ}=$________.

13．已知$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|\neq 0$，$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|$，则$\vec{a}$与$\vec{b}-\vec{a}$的夹角为________.

14．已知锐角$\triangle ABC$的内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，且$2c\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)=a+b$，

则$\dfrac{\sin A}{\cos B}$的取值范围为________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（13 分）

已知复数$z_1=a+i\ (a\in R)$，$z_2=1-i$.

(1)若$\dfrac{z_2}{z_1}=\dfrac{1}{i}$，求实数$a$的值；

(2) 若z_1，z_2在复平面内的对应点关于实轴对称，求$\dfrac{z_1}{z_2}+\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2+\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^3+\cdots+\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{2023}$.

16.（15 分）

已知向量$\vec{a}=(\sin\alpha,\cos\alpha)$，$\vec{b}=(\sqrt{3},-1)$，$\vec{c}=(\cos\beta,-\sin\beta)$，$\alpha\in(0,\pi)$，

(1)若$\vec{a}\perp\vec{b}$，求α的值；

(2)若$\vec{a}\parallel\vec{b}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\dfrac{12}{13}$，$\beta\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$，求$\sin\beta$的值.

17.（15 分）

已知$\triangle ABC$的内角A,B,C所对的边分别为a,b,c. 点D在AC上，$AD=BD=2DC$.

(1)若$a=2\sqrt{2},\ c=\sqrt{2}$，求b；

(2)若$B=\dfrac{\pi}{3}$，求$\dfrac{a}{c}$.

18．（17 分）

已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sin\omega x\cos\omega x-\sqrt{3}\cos^{2}\omega x\left(\omega>0\right)$ 的最小正周期为 π .

(1)求函数 $f\left(x\right)$ 的解析式；

(2)当 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{24},\dfrac{17\pi}{24}\right]$ 时，方程 $f\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{8}{9}$ 有四个根 $x_1,x_2,x_3,x_4\left(x_1<x_2<x_3<x_4\right)$，

求 $x_1+2x_2+2x_3+x_4$ 的值；

(3)是否存在实数 m，使得关于 x 的不等式 $f\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)>\sqrt{2}m\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 内恒成立？若存在，求出 m 的值；若不存在，说明理由.

19．（17 分）

十七世纪法国数学家、被誉为业余数学家之王的皮埃尔·德·费马提出的一个著名的几何问题：“已知一个三角形，求作一点，使其与这个三角形的三个顶点的距离之和最小”．它的答案是：当三角形的三个角均小于120°时，所求的点为三角形的正等角中心，即该点与三角形的三个顶点的连线两两成角120°；当三角形有一内角大于或等于120°时，所求点为三角形最大内角的顶点．在费马问题中所求的点称为费马点.

已知$\triangle ABC$的内角 A, B, C 所对的边分别为a,b,c，设点 P 为$\triangle ABC$的费马点.

(1)若 $\dfrac{a-b}{c}=\dfrac{\sin A-\sin C}{\sin A+\sin B}$.

①求 B；

②若 $ac=8$，求 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$.

(2)若 $\cos 2B+\cos 2C-\cos 2A=1$，$\left|\overrightarrow{PA}\right|=1$，$\left|\overrightarrow{PB}\right|+\left|\overrightarrow{PC}\right|=\lambda$，求实数 λ 的取值范围.