**江苏省仪征中学2023-2024学年度第一学期期中复习讲义（6）**

姓名：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_班级：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

一、单选题（本大题共**5**小题，共**25.0**分。在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1.若$a<b<0$，则(    )

A. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ B. $0<\frac{a}{b}<1$ C. $ab>b^{2}$ D. $\frac{b}{a}>\frac{a}{b}$

2.若$x>0$，$y>0$，则下列各式中，恒等的是(    )

A. $lg x+lg y=lg (x+y)$ B. $lg x^{2}=(lg x)^{2}$
C. $\frac{lg x}{n}=lg \frac{x}{n}$ D. $lg x^{\frac{1}{n}}=\frac{lg x}{n}$

3.$[2021$徐州一中高一期中$]$已知函数$f(x)=ax^{2}+2a$是定义在$[a,a+2]$上的偶函数，又$g(x)=f(x+1)$，则$g(−\frac{3}{2})$，$g(−1)$，$g(0)$的大小关系为  (    )

A. $g(0)>g(−\frac{3}{2})>g(−1)$ B. $g(−\frac{3}{2})>g(0)>g(−1)$
C. $g(0)>g(−1)>g(−\frac{3}{2})$ D. $g(−1)>g(−\frac{3}{2})>g(0)$

4.如果函数$f\left(x\right)$满足$f\left(10^{x}\right)=x$，那么$f\left(5\right)$等于(    )

A. $10^{5}$ B. $5^{10}$ C. $lg10$ D. $lg5$

5.国内生产总值$(GDP)$是指按国家市场价格计算的一个国家$($或地区$)$所有常驻单位在一定时期内生产活动的最终成果，常被公认为是衡量国家经济状况的最佳指标．某城市$2020$年的$GDP$为$8000$亿元，若保持$6％$的年平均增长率，则该城市的$GDP$达到$1$万亿元预计在$($参考数据：$ln1.25≈0.22$，$ln1.06≈0.06)$(    )

A. $2023$年 B. $2024$年 C. $2025$年 D. $2026$年

二、多选题（本大题共**3**小题，共**15.0**分。在每小题有多项符合题目要求）

6.已知关于$x$的方程$x^{2}+(m−3)x+m=0$，下列结论正确的是  (    )

A. 方程$x^{2}+(m−3)x+m=0$有实数根的充要条件是$m\in \{m|m<1$或$m>9\}$
B. 方程$x^{2}+(m−3)x+m=0$有两正实数根的充要条件是$m\in \{m|0<m\leq 1\}$
C. 方程$x^{2}+(m−3)x+m=0$无实数根的必要条件是$m\in \{m|m>1\}$
D. 当$m=3$时，方程的两实数根之和为$0$

7.设$f(x)=(\frac{1}{2})^{\left|x\right|}−1,x\in R,则f(x)$  (    )

A. 为偶函数 B. 值域为$\left(−\infty ,0\right]$
C. 在$(0,+\infty )$上是减函数 D. 在$(0,+\infty )$上是增函数

8.判断下列命题不正确的是(    )

A. 幂函数的图象都经过点$(1,1)$和点$(0,0)$ B. 幂函数的图象不可能在第四象限
C. 幂函数$y=x^{n}$当$n>0$时是增函数 D. 幂函数$y=x^{n}$当$n>0$时是减函数

三、填空题（本大题共**3**小题，共**15.0**分）

9.设$a$，$b\in R$，则“$a^{2}+b^{2}=0$”的充要条件是          ．

10.已知实数$x$、$y$，满足$−1\leq x+y\leq 4$，$2\leq x−y\leq 3$，则$t=3x−2y$的取值范围是          ．

11.不等式$\frac{(x+1)(2−x)}{(x−1)^{2}(x+4)}\geq 0$的解集为          ．

四、解答题（本大题共**3**小题，共**36.0**分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

12.$($本小题$12.0$分$)$

$(1)$计算：$lg25+lg4+6^{log\_{6}3}+log\_{2}3⋅log\_{3}4;$

$(2)$已知：$x^{\frac{1}{2}}+x^{−\frac{1}{2}}=3$，求$\frac{x^{2}+x^{−2}−2}{x+x^{−1}−3}$的值．

13.$($本小题$12.0$分$)$
已知关于$x$的不等式$ax^{2}+5x−2>0$的解集是$M$．
$(1)$若$a=3$，求解集$M$；
$(2)$若$M=\{x|\frac{1}{2}<x<2\}$解关于$x$的不等式$\frac{ax}{2x−1}>1$．

14.$($本小题$12.0$分$)$

已知定义域为$R$的函数$f\left(x\right)=\frac{−2^{x}+a}{2^{x}+1}$是奇函数．

$(1)$求实数$a$的值；

$(2)$判断并且用定义证明$f(x)$的单调性；

$(3)$若不等式$f(t·3^{x})+f(3^{x}−9^{x}−2)>0$对任意的$x\geq 0$恒成立，求实数$t$的取值范围．

**答案和解析**

1.【答案】$C$ 用不等式的性质和特殊值法可依次验证每个选项．

解：对于$A$：当$a=−2$，$b=−1$时，显然不成立，$∴$*A*错误
对于$B$：$∵a<b<0$，$∴|a|>|b|>0∴\frac{a}{b}>1$，$∴$*B*错误
对于$C$：由已知条件知$a<b$，$b<0$
根据不等式的性质得：$a⋅b>b⋅b$即$ab>b^{2}∴$*C*正确
对于$D$：由已知条件知：$\frac{b}{a}<1 ,\frac{a}{b}>1∴$*D*错误．故选*C*．

2.【答案】$D$

解：$A$、$B$、$C$都不符合对数的运算法则，
$lg x^{\frac{1}{n}}=\frac{lg x}{n}$符合对数的运算法则，*D*正确．
3.【答案】$D$

解：因为函数$f(x)=ax^{2}+2a$是定义在$[a,a+2]$上的偶函数，
所以$a+a+2=0$，解得$a=−1$，则$f(x)=−x^{2}−2$，
所以$g(x)=f(x+1)=−(x+1)^{2}−2$，所以$g(−1)>g(−\frac{3}{2})>g(0)$．故选*D*．

4.【答案】$D$ 解：$∵f(10^{x})=x$，$∴$设$10^{x}=t$，
则$x=lgt ( t>0)$，$f(t)=f(10^{x})=x=lgt$，$∴f(x)=lgx (x>0)$，
$∴f(5)=lg5$．故选*D*．

5.【答案】$B$ 解：若$2021$年是第一年，设第$x$年该城市的$GDP$达到$1$万亿元，
则$0.8×(1+0.06)^{x}=1$，则$1.06^{x}=1.25$．
所以$x=log\_{1.06}1.25=\frac{ln1.25}{ln1.06}≈\frac{0.22}{0.06}≈3.67$，
则该城市的$GDP$达到$1$万亿元预计在$2024$年．

6.【答案】$BC$

解：对于$A$，若$x^{2}+(m−3)x+m=0$有实数根，则$Δ=(m−3)^{2}−4m\geq 0.$得$m\leq 1$或$m\geq 9$，故*A*错误；
对于$B$，由题意得$\left\{\begin{matrix}Δ=(m−3)^{2}−4m\geq 0\\3−m>0\\m>0\end{matrix}\right.$，解得$0<m\leq 1$，故*B*正确；
对于$C$，若$x^{2}+(m−3)x+m=0$无实数根，则$Δ=(m−3)^{2}−4m<0$，得$1<m<9$，又$\{m|1<m<9\}⊆\{m|m>1\}$，故*C*正确；
对于$D$，当$m=3$时，方程为$x^{2}+3=0$，无实数根，故*D*错误．
故选*BC*．

7.【答案】$AC$
依题意，根据函数奇偶性的定义可判断*A*正确，当$x>0$时，$f(x)=(\frac{1}{2})^{x}−1$，结合指数函数的性质判断$CD$，根据$y=(\frac{1}{2})^{|x|}$的值域为$(0,1]$判断*B*错误．

解：函数$f(x)=(\frac{1}{2})^{|x|}−1$定义域为$R$，
$f\left(−x\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\left|−x\right|}−1=\left(\frac{1}{2}\right)^{\left|x\right|}−1=f\left(x\right)$，所以函数$f(x)$为偶函数，故 *A*正确；
当$x>0$时，$f(x)=(\frac{1}{2})^{x}−1$，结合指数函数的性质知$f(x)$在$(0,+\infty )$上是减函数，故*C*正确，*D*错误，
由$y=(\frac{1}{2})^{|x|}$的值域为$(0,1]$，得函数$f(x)=(\frac{1}{2})^{|x|}−1$的值域为$\left(−1,0\right]$，故*B*错误．
故选*AC*．

8.【答案】$ACD$

解：幂函数$y=\frac{1}{x}$不经过$\left(0,0\right)$，故*A*错，
幂函数的图象不可能在第四象限，故*B*正确，
幂函数$y=x^{n}$未指明单调区间，故*C*，$D$错．
故选*ACD*．

9.【答案】$a=b=0$

解：若$a^{2}+b^{2}=0$，且$a\in R$，$b\in R$，则$a^{2}=b^{2}=0$，即$a=b=0;$
若$a=b=0$，则$a^{2}+b^{2}=0$成立，
故“$a^{2}+b^{2}=0$”的充要条件是$a=b=0$．
故答案为$a=b=0$．

10.【答案】$\left[\frac{9}{2},\frac{19}{2}\right]$

利用待定系数法得出$3x−2y=\frac{1}{2}\left(x+y\right)+\frac{5}{2}\left(x−y\right)$，结合不等式的基本性质可求得$t=3x−2y$的取值范围．

解：设$3x−2y=m\left(x+y\right)+n\left(x−y\right)=\left(m+n\right)x+\left(m−n\right)y$，

$∴\left\{\begin{matrix}m+n=3\\m−n=−2\end{matrix}\right.$，解得$\left\{\begin{matrix}m=\frac{1}{2}\\n=\frac{5}{2}\end{matrix}\right.$，所以$3x−2y=\frac{1}{2}\left(x+y\right)+\frac{5}{2}\left(x−y\right)$，

$∵−1\leq x+y\leq 4$，$2\leq x−y\leq 3$，所以$−\frac{1}{2}\leq \frac{1}{2}\left(x+y\right)\leq 2$，$5\leq \frac{5}{2}\left(x−y\right)\leq \frac{15}{2}$，

所以，$\frac{9}{2}\leq \frac{1}{2}\left(x+y\right)+\frac{5}{2}\left(x−y\right)\leq \frac{19}{2}$，即$\frac{9}{2}\leq 3x−2y\leq \frac{19}{2}$，

因此，$t=3x−2y$的取值范围是$\left[\frac{9}{2},\frac{19}{2}\right]$，故答案为$\left[\frac{9}{2},\frac{19}{2}\right]$．

11.【答案】$\{x|x<−4$或$−1\leq x<1$或$1<x⩽2\}$

【解答】解：原不等式可化为$\frac{(x+1)(x−2)}{(x−1)^{2}(x+4)}\leq 0$，
此不等式等价于$(x+1)(x−2)(x−1)^{2}⋅(x+4)\leq 0$，且$x\ne 1$，$x\ne −4$．
分别令各个因式为$0$，可得根依次为$−1$，$2$，$1$，$−4.$如图，利用数轴“穿针引线”法可得不等式的解集为$\{x|x<−4$或$−1\leq x<1$或$1<x\leq $ $2\}$．



12.【答案】解：$(1)$原式$=lg100+3+\frac{lg3}{lg2}⋅\frac{lg4}{lg3}=2+3+2=7$；
$(2)$由$x^{\frac{1}{2}}+x^{−\frac{1}{2}}=3$，平方得$x+x^{−1}+2=9$，即$x+x^{−1}=7$，
$x+x^{−1}=7$平方得$x^{2}+x^{−2}+2=49$，即$x^{2}+x^{−2}=47$，
所以原式$=\frac{x^{2}+x^{−2}−2}{x+x^{−1}−3}=\frac{45}{4}$．

$(2)$把给出的已知条件进行两次平方运算，然后代入要求解的式子即可得到答案．

13.【答案】解：$(1)$当$a=3$时，不等式为$3x^{2}+5x−2>0$，即$(3x−1)(x+2)>0$，
所以$x<−2$或$x>\frac{1}{3}$，故解集$M=\{x|x<−2$或$x>\frac{1}{3}\}.$
$(2)$因为$M=\{x|\frac{1}{2}<x<2\}$，所以$\frac{1}{2}$和$2$是方程$ax^{2}+5x−2=0$的两根，
所以$\left\{\begin{matrix}\frac{1}{2}+2=−\frac{5}{a}\\\frac{1}{2}×2=−\frac{2}{a}\end{matrix}\right.$，解得$a=−2$，代入不等式$\frac{ax}{2x−1}>1$得，$\frac{−2x}{2x−1}>1$，
移项整理得，$\frac{1−4x}{2x−1}>0$，即$(4x−1)(2x−1)<0$，所以$\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}$，
故不等式的解集为$\{x|\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}\}.$

$(1)$将$a=3$代入不等式中，利用十字相乘因式分解，即可得解；
$(2)$由题意知，$\frac{1}{2}$和$2$是方程$ax^{2}+5x−2=0$的两根，利用韦达定理求出$a$的值，再代入不等式中，解分式不等式即可．

14.【答案】解：$(1)$因为$f(x)$是定义在$R$上的奇函数，
则$f(−x)=−f(x)$，即$f(−x)+f(x)=0$，

可得$f(−x)+f(x)=\frac{a−2^{−x}}{2^{−x}+1}+\frac{a−2^{x}}{2^{x}+1}$
$$=\frac{2^{x}(a−2^{−x})}{2^{x}(2^{−x}+1)}+\frac{a−2^{x}}{2^{x}+1}=\frac{a⋅2^{x}−1+a−2^{x}}{2^{x}+1}$$

$=\frac{\left(a−1\right)\left(2^{x}+1\right)}{2^{x}+1}=a−1=0$，解得$a=1$；

$(2)$由$(1)$知：$f\left(x\right)=\frac{−2^{x}+1}{2^{x}+1}=\frac{2−\left(2^{x}+1\right)}{2^{x}+1}=\frac{2}{2^{x}+1}−1$，故$f(x)$在$R$上是递减函数．

证明：任取$x\_{1}$、$x\_{2}\in R$，且$x\_{1}<x\_{2}$，

$f\left(x\_{1}\right)−f\left(x\_{2}\right)=−1+\frac{2}{2^{x\_{1}}+1}+1−\frac{2}{2^{x\_{2}}+1}=−\frac{2\left(2^{x\_{1}}−2^{x\_{2}}\right)}{\left(2^{x\_{1}}+1\right)\left(2^{x\_{2}}+1\right)}$，

$∵x\_{1}<x\_{2}$，$∴2^{x\_{1}}<2^{x\_{2}}$，$∴f(x\_{1})−f(x\_{2})>0$，即$f(x\_{1})>f(x\_{2})$，

故$f(x)$是定义在$R$上的递减函数；

$(3)∵f(t·3^{x})+f(3^{x}−9^{x}−2)>0$，$∴f(t·3^{x})>−f(3^{x}−9^{x}−2)$，

因为$f(x)$是$R$上的奇函数，$∴f(t·3^{x})>f(−3^{x}+9^{x}+2)$，

$∵f(x)$是$R$上的递减函数，$∴t·3^{x}<−3^{x}+9^{x}+2$，

$∴t<\frac{−3^{x}+9^{x}+2}{3^{x}}=−1+3^{x}+\frac{2}{3^{x}}$对任意的$x\geq 0$恒成立，

设$m=3^{x}$，且$g\left(m\right)=m+\frac{2}{m}−1$，即$t<g\left(m\right)\_{min}$．

$∵x\geq 0$，$∴m=3^{x}\geq 1$，
$∴g\left(m\right)=m+\frac{2}{m}−1\geq 2\sqrt[ ]{m⋅\frac{2}{m}}−1=2\sqrt[ ]{2}−1$，

$($当且仅当$m=\frac{2}{m}$即$m=\sqrt[ ]{2}$时等号成立$)$，
$∴t<2\sqrt[ ]{2}−1$．

【解析】本题考查了函数的奇偶性、单调性、不等式恒成立等问题，属于中档题．
$(1)$根据$f(−x)+f(x)=0$，解得$a=1$；
$(2)$先对$f(x)$分离常数$−1$后，判断出$f(x)$为递减函数，再用定义证明；
$(3)$先用函数的奇函数性质，再用减函数性质变形，然后分离参数$t$，最后构造函数求最小值．