江苏省仪征中学2023-2024学年第一学期周末练习4

高一数学

1. 单项选择题（本大题共4小题，每小题5分，共计20分。每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的。请把正确答案的选项填涂在答题卡相应位置上。）

1.“$\left|x\right|<1$”是“$x^{2}−2x−3<0$”的(    )

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

2.下列函数$f(x)$与$g(x)$是同一个函数的是(    )

A. $f(x)=x−1,g(x)=\frac{x^{2}}{x}−1$ B. $f(x)=x^{2},g(x)=(\sqrt{x})^{4}$
C. $f(x)=x^{2},g(x)=\sqrt[3]{x^{6}}$ D. $f(x)=\sqrt{x},g(x)=\frac{x}{\sqrt{x}}$

3.已知函数$y=f(x)$的定义域为$[−8,1]$，则函数$g(x)=\frac{f(2x+1)}{x+2}$的定义域是(    )

A. $(−\infty ,−2)∪(−2,3]$ B. $[−8,−2)∪(−2,1]$
C. $ [−\frac{9}{2},−2]$ D. $[−\frac{9}{2},−2)∪(−2,0]$

4.函数$y=\sqrt[ ]{kx^{2}−8x+k−6}$的定义域为$R$，则$k$的取值范围是(    )

A. $(−\infty ,−2)∪[0$，$+\infty )$ B. $[−2,8)$
C. $[8,+\infty )$ D. $(0,8]$

二、多选题（本大题共**3**小题，共**15.0**分。在每小题有多项符合题目要求）

5.若关于$x$的方程$x^{2}−(m−1)x+2−m=0$的两根为正数$($包含等根$)$，则$m$的取值可以是(    )

A. $−1−2\sqrt[ ]{2}$ B. $−1+2\sqrt[ ]{2}$ C. $1.9$ D. $1.99$

6.已知实数$x$，$y$满足$−1\leq x+y\leq 3$，$4\leq 2x−y\leq 9$，则(    )

A. $1\leq x\leq 4$ B. $−2\leq y\leq 1$ C. $2\leq 4x+y\leq 15$ D. $\frac{1}{3}\leq x−y\leq \frac{23}{3}$

7.德国数学家狄利克雷在数学领域成就显著，以其名命名的函数$f(x)=\left\{\begin{matrix}1,x为有理数,\\0,x为无理数\end{matrix}\right.$称为狄利克雷函数，则关于函数$f(x)$有(    )

A. $f(f(x))=1$ B. 函数$y=f(x)$的图象是两条直线
C. $f(\sqrt[ ]{2})>f(1)$ D. $∀x\in R$，都有$f(1−x)=f(1+x)$

三、填空题（本大题共**3**小题，共**15.0**分）

8.函数$f(x)=\frac{\sqrt[ ]{x−1}}{2−x}$的定义域为          ．

9.若$3f(x)+2f(\frac{1}{x})=4x$，则$f(x)=$          ．

10.已知函数$f(x)=\left\{\begin{matrix}2−x,&x\geq 1\\x^{2}+x−1,&x<1\end{matrix}\right.$，那么$f(f(4))=$          ；若存在实数$a$，使得$f(a)=f(f(a))$，则$a$的个数是          ．

四、解答题（本大题共**4**小题，共**50.0**分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

11.$($本小题$12.0$分$)$
求值：

$(1)\left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}−(−9.6)^{0}−\left(3\frac{3}{8}\right)^{−\frac{2}{3}}+(1.5)^{−2}$；

$(2)log\_{25}\frac{1}{2}⋅log\_{4}5−log\_{\frac{1}{3}}3−log\_{2}4+5^{log\_{5}2}$．

12.$($本小题$12.0$分$)$

已知函数$f\left(x\right)=\left\{\begin{matrix}x+1,x\leq −2\\\begin{matrix}^{2}+2x,−2<x<2\\2x−1,x\geq 2\end{matrix}\end{matrix}\right.$

$(1)$求$f(−5)$，$f(−\sqrt[ ]{3})$，$f\left(f\left(−\frac{5}{2}\right)\right)$的值；

$(2)$若$f(a)=3$，求实数$a$的值；

$(3)$若$f(m)>3m−5(m\geq 2)$，求实数$m$的取值范围．

13.$($本小题$12.0$分$)$

已知条件$p:(x+1)(2−x)⩾0$，条件$q:2m<x<1$．

$(1)$若$p$是$q$的必要非充分条件，求实数$m$的取值范围；

$(2)$若仅有一个整数使得“$p$是假命题，且$q$是真命题”成立，求实数$m$的取值范围．

14.$($本小题$14.0$分$)$

设函数$f(x)=ax^{2}+(1−a)x+a−2$．

$(1)$若关于$x$的不等式$f(x)\geq −2$有实数解，求实数$a$的取值范围；

$(2)$若不等式$f(x)\geq −2$对于实数$a\in [−1,1]$时恒成立，求$x$的取值范围；

$(3)$解关于$x$的不等式：$f(x)<a−1(a\in R).$

江苏省仪征中学2023-2024学年第一学期周末练习4

**答案和解析**

1.【答案】$A$

【解析】【分析】

本题主要考查了绝对值不等式求解及一元二次不等式求解，也考查了充分与必要条件的判定，属于基础题．
先求解绝对值不等式与一元二次不等式，再根据充分必要条件的定义判断．即可得所需答案．

【解答】

解：$|x|<1⇔−1<x<1$，

$x^{2}−2x−3<0⇔−1<x<3$，

所以$|x|<1$时$x^{2}−2x−3<0$成立，
但$x^{2}−2x−3<0$时，$|x|<1$不一定成立，
因此“$\left|x\right|<1$”是“$x^{2}−2x−3<0$”的充分不必要条件．

故选：$A$．

2.【答案】$C$

【解析】【分析】

本题考查判断两函数是否为同一个函数，属于基础题．
根据定义域和对应法则判断即可．

【解答】

解：$A$选项： $f(x)$ 定义域为$R$， $g(x)$ 定义域为 $\left\{x|x\ne 0\right\}$ ，定义域不相同，故$A$错；

$B$选项： $f(x)$ 定义域为$R$， $g(x)$ 定义域为 $[0,+\infty )$ ，定义域不相同，故$B$错；

$C$选项： $f(x)$ ， $g(x)$ 的定义域为$R$，且 $f(x)=x^{2}=g(x)$ ，定义域和对应法则相同，故$C$正确；

$D$选项： $f(x)$ 定义域为 $[0,+\infty )$ ， $g(x)$ 定义域为 $(0,+\infty )$ ，定义域不相同，故$D$错$.$

故选：$C.$

3.【答案】$D$

【解析】【分析】

本题考查了求抽象函数的定义域问题，是一道基础题．
根据函数$f(x)$的定义域求出$2x+1$中$x$的范围，结合分母不为$0$，求出函数$g(x)$的定义域即可．

【解答】
解：由题意得：$−8\leq 2x+1\leq 1$，解得：$−\frac{9}{2}\leq x\leq 0$，
由$x+2\ne 0$解得：$x\ne −2$，
故函数的定义域是$[−\frac{9}{2},−2)∪(−2,0]$ ．
故选*D*．

4.【答案】$C$

【解析】【分析】

本题主要考查了函数的定义域与一元二次不等式的恒成立问题的相互转化，体现了转化思想及分类讨论思想的应用．
将题干条件转化为$kx^{2}−8x+k−6\geq 0$恒成立，然后对$k$进行分类讨论，结合二次函数的性质可求．

【解答】
解：由题意可得：$kx^{2}−8x+k−6\geq 0$恒成立，
当$k=0$时，$−8x−6\geq 0$不恒成立，
当$k\ne 0$时，可得$\left\{\begin{matrix}k>0\\△=64−4k(k−6)\leq 0\end{matrix}\right.$，解得$k\geq 8$，
综上可得：$k\geq 8$，
故选：$C$．

5.【答案】$BCD$

【解析】【分析】

本题考查一元二次方程根的分布，关键是构建函数，用函数思想求解，属于中档题．
构建函数$f(x)=x^{2}−(m−1)x+2−m$，结合二次函数图象得到不等式组，解不等式组得到实数$m$的取值范围即可．

【解答】
解：由题意，构建函数$f(x)=x^{2}−(m−1)x+2−m$，
因为关于$x$的方程$x^{2}−(m−1)x+2−m=0$的两根为正数$($包含等根$)$，
所以$\left\{\begin{matrix}Δ=\left(m−1\right)^{2}−4\left(2−m\right)⩾0\\\frac{m−1}{2}>0\\f\left(0\right)>0\end{matrix}\right.,$
解得$−1+2\sqrt[ ]{2}\leq m<2$，
故选*BCD*．

6.【答案】$AC$

【解析】【分析】

本题考查利用不等式的性质求取值范围．
分别求出$x$，$y$的取值范围，再逐项分析即可．

【解答】
解：因为$−1\leq x+y\leq 3$，$4\leq 2x−y\leq 9$，
相加得$3\leq 3x\leq 12$，
所以$1\leq x\leq 4$，*A*正确$;$
因为$\left\{\begin{matrix}−6\leq −2x−2y\leq 2\\4\leq 2x−y\leq 9\end{matrix}\right.$，
相加得$−2\leq −3y\leq 11$，解得$−\frac{11}{3}\leq y\leq \frac{2}{3}$，*B*错误$;$
因为$4x+y=2(x+y)+(2x−y)$，
所以$2\leq 4x+y\leq 15$，*C*正确$;$
因为$x−y=−\frac{1}{3}(x+y)+\frac{2}{3}(2x−y)$，
所以$\frac{5}{3}\leq x−y\leq \frac{19}{3}$，*D*错误．
故选*AC*．

7.【答案】$AD$

【解析】【分析】

本题考查了狄利克雷函数的性质，考查了学生对有理数和无理数的理解能力，属于基础题．
对应各个选项，结合有理数和无理数以及狄利克雷函数的性质，即可判断各个选项正确与否．

【解答】
解：选项*A*：若$x$为有理数，则$f(x)=1$，所以$f(f(x))=f(1)=1$，若$x$为无理数，则$f(x)=0$，所以$f(f(x))=f(0)=1$，即不管$x$为有理数还是无理数，均有$f(f(x))=1$，*A*正确，
选项*B*：在$x$轴上，有理数和无理数是分散的，图象不可能为直线，*B*错误，
选项*C*：$\sqrt[ ]{2}$是无理数，所以$f(\sqrt[ ]{2})=0$，而$1$为有理数，所以$f(1)=1$，
所以$f(\sqrt[ ]{2})<f(1)$，*C*错误，
选项*D*：若$x$为无理数，则$1−x$与$1+x$都为无理数，所以$f(1−x)=f(1+x)=0$，
若$x$为有理数，则$1−x$与$1+x$为有理数，所以$f(1−x)=f(1+x)=1$，故$∀x\in R$，都有$f(1−x)=f(1+x)$，*D*正确，
故选：$AD$．

8.【答案】$\{x|x\geq 1,且x\ne 2\}$

【解析】【分析】

本题考查求函数的定义域，属于基础题．
根据函数解析式使其有意义即可求解．

【解答】

解：因为$f(x)=\frac{\sqrt[ ]{x−1}}{2−x}$，所以$\left\{\begin{matrix}x−1\geq 0\\2−x\ne 0\end{matrix}\right.$，解得$x⩾1,且x\ne 2$

故答案为：$\{x|x\geq 1,且x\ne 2\}$．

9.【答案】$\frac{12x}{5}−\frac{8}{5x}$

【解析】【分析】

本题考查了函数解析式的求法，属于基础题．
把$x=\frac{1}{x}$代入条件式，与条件式联立方程组得出$f(x)$．

【解答】
解：$∵3f(x)+2f(\frac{1}{x})=4x$，
$∴3f(\frac{1}{x})+2f(x)=\frac{4}{x}$，
$∴f(\frac{1}{x})=\frac{1}{3}(\frac{4}{x}−2f(x))$，代入$3f(x)+2f(\frac{1}{x})=4x$，
得$3f(x)+\frac{2}{3}(\frac{4}{x}−2f(x))=4x$，
$∴f(x)=\frac{12x}{5}−\frac{8}{5x}$．
故答案为$\frac{12x}{5}−\frac{8}{5x}$．

10.【答案】$1；5$

【解析】【分析】

本题考查了分段函数求值，分段函数性质以及函数图象的应用，考查了分析和运算能力．
根据分段函数解析式，先求出$f\left(4\right)$的值，再求$f(f(4))$即可$;$令$f\left(a\right)=t$，则$f(a)=f(f(a))$，等价于$f\left(t\right)=t$，求出$t$的值，再由$f\left(a\right)=t$，建立关于$a$的方程，求出方程解的个数即可得到答案．

【解答】
解：由题意，函数$f(x)=\left\{\begin{matrix}2−x,x⩾1\\x^{2}+x−1,x<1\end{matrix}\right.,$
则$f\left(4\right)=2−4=−2$，
所以$f(f(4))=f\left(−2\right)=\left(−2\right)^{2}+\left(−2\right)−1=1$；
作出函数$f(x)$大致图象如下：

令$f\left(a\right)=t$，则$f(a)=f(f(a))$，等价于$f\left(t\right)=t$，
即$\left\{\begin{matrix}t⩾1\\2−t=t\end{matrix}\right.或\left\{\begin{matrix}t<1\\t^{2}+t−1=t\end{matrix}\right.$，解得$t=1$或$t=−1;$
由$f\left(a\right)=t$可得$f\left(a\right)=1$或$f\left(a\right)=−1$，
由$f\left(a\right)=1$结合函数图象可得此时$a=−2$或$a=1$；
由$f\left(a\right)=−1$可得当$a<1$时，有$f\left(a\right)=a^{2}+a−1=−1$，解得$a=0$或$a=−1$，
当$a>1$时，有$f\left(a\right)=2−a=−1$，解得$a=3$；
综上所述，满足$f(a)=f(f(a))$的值有$−2$，$−1$，$0$，$1$，$3$，共$5$个．
故答案为$1$；$5$．

11.【答案】解：$(1)$原式$=(\frac{9}{4})^{\frac{1}{2}}−1−(\frac{27}{8})^{−\frac{2}{3}}+(\frac{3}{2})^{−2}=\frac{3}{2}−1−(\frac{3}{2})^{−2}+(\frac{2}{3})^{2}=\frac{3}{2}−1−\frac{4}{9}+\frac{4}{9}=\frac{1}{2};$
$(2)$原式$=−\frac{1}{2}log\_{5}2×\frac{1}{2}log\_{2}5+log\_{3}3−2log\_{2}2+2=−\frac{1}{4}+1−2+2=\frac{3}{4}$．

【解析】本题主要考查了指数的运算与对数的运算，属于基础题．
$(1)$根据分数指数幂的运算法则求解即可；

$(2)$根据对数的运算法则求解即可．

12.【答案】解：$(1)$由$−5\in (−\infty ,−2]$，$−\sqrt[ ]{3}\in (−2,2),−\frac{5}{2}\in (−\infty ,−2],$
知$f(−5)=−5+1=−4$，
$f(−\sqrt[ ]{3})=(−\sqrt[ ]{3})^{2}+2×(−\sqrt[ ]{3})=3−2\sqrt[ ]{3}$，
$f\left(−\frac{5}{2}\right)=−\frac{5}{2}+1=−\frac{3}{2}$，
而$−2<−\frac{3}{2}<2$，
$∴f\left(f\left(−\frac{5}{2}\right)\right)=f\left(−\frac{3}{2}\right)=\left(−\frac{3}{2}\right)^{2}+2×\left(−\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}−3=−\frac{3}{4};$
$(2)$当$a\leq −2$时，$a+1=3$，即$a=2>−2$，不合题意，舍去$;$
  当$−2<a<2$时，$a^{2}+2a=3$，即$a^{2}+2a−3=0.$
$∴(a−1)(a+3)=0$，得$a=1$或$a=−3.$
$∵1\in (−2,2)$，$−3\notin (−2,2)$，
$∴a=1$符合题意$;$
当$a\geq 2$时，$2a−1=3$，即$a=2$符合题意．
综上可得，当$f(a)=3$时，$a=1$或$a=2.$
$(3)∵m\geq 2$，
$∴f(m)=2m−1$，
即$2m−1>3m−5$，解得$m<4$，
又$m\geq 2$，
$∴m$的取值范围为$[2,4)$．

【解析】本题考查分段函数，属于中档题．
$(1)$根据分段函数自变量的取值代入相应的解析式，求函数值$;$
$(2)$根据分段函数自变量的取值代入相应的解析式，解方程$;$
$(3))$根据分段函数自变量的取值代入相应的解析式，解不等式．

13.【答案】解$:(1)$条件$p:(x+1)(2−x)⩾0$，
令集合$A=\{x|−1⩽x⩽2\}$，
条件$q:2m<x<1$
令集合$B=\{x|2m<x<1\}$，
已知$p$是$q$的必要非充分条件，
则集合$B$是集合$A$的真子集，
$①$当$B=⌀$时，$2m\geq 1$，此时$m\geq \frac{1}{2}$；
$②$当$B\ne ⌀$时，$\left\{\begin{matrix}−1⩽2m\\2m<1\end{matrix}\right.,$
此时$−\frac{1}{2}⩽m<\frac{1}{2}$，
综上知，实数$m$的取值范围是$[−\frac{1}{2},+\infty )$．
$(2)∵A=\left\{\left.x\right|−1\leq x\leq 2\right\}$，
$∴∁\_{R}A=\left\{\left.x\right|x<−1或x>2\right\}$ ．
由题意知$B\ne ⌀$，所以$m< \frac{1}{2}$，
若$\left(∁\_{R}A\right)∩B$中只有一个整数，
则$−3\leq 2m<−2$，得$−\frac{3}{2}\leq m<−1$；
所以实数$m$的取值范围是$\left\{\left.m\right|−\frac{3}{2}\leq m<−1\right\}$．

【解析】本题考查了必要非充分条件的应用，考查命题真假的判断，考查分类讨论．
$(1)$令集合$A=\{x|−1⩽x⩽2\}$，集合$B=\{x|2m<x<1\}$，由$p$，$q$的关系得集合$B$是集合$A$的真子集，进一步求解即可；
$(2)$  若$p$假$q$真，得到$\left(∁\_{R}A\right)∩B$中只有一个整数，列出关于$m$的不等式求解即可．

14.【答案】解：$(1)$依题意，$f\left(x\right)\geq −2$有实数解，即不等式$ax^{2}+(1−a)x+a\geq 0$有实数解，

当$a=0$时，$x\geq 0$有实数解，满足，则$a=0$符合题意，

当$a>0$时，二次函数$y=ax^{2}+(1−a)x+a$的开口向上，当$x=0$时$y=a>0$成立，即$ax^{2}+(1−a)x+a\geq 0$一定有实数解，于是得$a>0$符合题意，

当$a<0$时，二次函数$y=ax^{2}+(1−a)x+a$的开口向下，要$y\geq 0$有解，当且仅当$Δ=(1−a)^{2}−4a^{2}⩾0⇔−1⩽a⩽\frac{1}{3}$，从而得$−1⩽a<0$，

综上，$a\geq −1$，

所以实数$a$的取值范围是$a\geq −1$；

$(2)$不等式$f\left(x\right)\geq −2$对于实数$a\in \left[−1,1\right]$时恒成立，即$∀a\in [−1,1],(x^{2}−x+1)a+x\geq 0$，

显然$x^{2}−x+1>0$，函数$g(a)=(x^{2}−x+1)a+x$在$a\in \left[−1,1\right]$上递增，从而得$g(−1)\geq 0$，即$−x^{2}+2x−1\geq 0$，解得$x=1$，

所以实数$x$的取值范围是$\{1\}$；

$(3)$不等式$f(x)<a−1⇔ax^{2}+(1−a)x−1<0$，

当$a=0$时，$x<1$，

当$a>0$时，不等式可化为$(x+\frac{1}{a})(x−1)<0$，而$−\frac{1}{a}<0$，解得$−\frac{1}{a}<x<1$，

当$a<0$时，不等式可化为$(x+\frac{1}{a})(x−1)>0$，

当$−\frac{1}{a}=1$，即$a=−1$时，$x\in R,x\ne 1$，

当$−\frac{1}{a}<1$，即$a<−1$时，$x<−\frac{1}{a}$或$x>1$，

当$−\frac{1}{a}>1$，即$−1<a<0$时，$x<1$或$x>−\frac{1}{a}$，

所以，当$a=0$时，原不等式的解集为$(−\infty ,1)$，

当$a>0$时，原不等式的解集为$(−\frac{1}{a},1)$，

当$−1\leq a<0$时，原不等式的解集为$(−\infty ,1)∪(−\frac{1}{a},+\infty )$，

当$a<−1$时，原不等式的解集为$(−\infty ,−\frac{1}{a})∪(1,+\infty )$．

【解析】本题考查不等式恒成立的条件及含参数不等式问题的解法，属于拔高题．
$(1)f\left(x\right)\geq −2$有实数解，即不等式$ax^{2}+(1−a)x+a\geq 0$有实数解，从而根据$a$的范围分类讨论，利用二次函数的性质求解即可；
$(2)$由题意，得$∀a\in [−1,1],(x^{2}−x+1)a+x\geq 0$，从而可求出$x$的取值范围；
$(3)$不等式$f(x)<a−1⇔ax^{2}+(1−a)x−1<0$，注意对参数$a$分情况讨论，特别当$a\ne 0$时，通过比较对应二次方程的两根$−\frac{1}{a},1$的大小得出不等式的解集．