

二次函数含参最值问题

题型一、动轴定范围

例 1. 当 $0 \leq x \leq 2$ 时, 函数 $y = ax^2 + 4(a+1)x - 3$ 在 $x = 2$ 时, 取得最大值, 求实数 a 的取值范围

随堂练习

练习 1. 已知 $y = 3x^2 - 2tx - t^2$, 当 $-1 \leq x \leq 3$ 时, 有 $y \leq 0$ 恒成立, 求实数 t 的取值范围。

练习 2. 已知 $y = -3x^2 + 2x + t$, 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, 有 $y \geq 0$ 恒成立, 求实数 t 的取值范围。

练习 3. 已知 $y = -x^2 + 4ax - 3a^2$, 当 $1 \leq x \leq 2$ 时, 有 $y \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围。

练习 4. 已知 $y = 3x^2 - bx + b$, 当 $-2 \leq x \leq 1$ 时, 有 $y \geq 0$ 恒成立, 求实数 b 的取值范围。

练习 5. (1) 求 $y = x^2 + 2ax + 1$ 在 $-1 \leq x \leq 2$ 的最大值。

(2) 求函数 $y = -x(x-a)$ 在 $-1 \leq x \leq 1$ 上的最大值。

题型二、定轴动范围

例 1. 已知函数 $y = x^2 - 2x + 3$ ，在 $0 \leq x \leq m$ 时有最大值 3，最小值 2，求实数 m 的取值范围。

随堂练习

练习 1. 如果函数 $y = (x-1)^2 + 1$ 定义在区间 $t \leq x \leq t+1$ 上，求 y 的最小值。

练习 2. 已知 $y = x^2 - 2x + 3$ ，当 $t \leq x \leq t+1$ 时，求 y 的最大值。

练习 3. 求函数 $y = x^2 - 2x + 3$ 在 $x \in [a, a+2]$ 上的最值。

题型三、动轴动范围

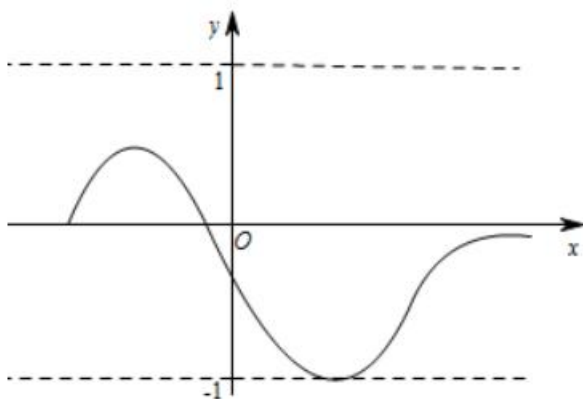
例 1. 已知函数 $y = 9x^2 - 6ax + a^2 - 10a - 6$ 在 $-\frac{1}{3} \leq x \leq b$ 上恒大于或等于 0，其中实数 $3 \leq a$ ，求实数 b 的范围。

随堂练习

练习 1. 已知抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 交 x 轴于点 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ ，当 $-3 \leq x \leq 4$ 时，求 y 最大值。

练习 2. 对某一个函数给出如下定义：若存在实数 $M > 0$ ，对于任意的函数值 y ，都满足 $-M \leq y \leq M$

M, 则称这个函数是有界函数. 在所有满足条件的 M 中, 其最小值称为这个函数的边界值. 例如, 下图中的函数是有界函数, 其边界值是 1.



- (1) 分别判断函数 $y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) 和 $y = x + 1$ ($-4 < x \leq 2$) 是不是有界函数? 如果有界函数, 求边界值;
- (2) 若函数 $y = -x + 1$ ($a \leq x \leq b$, $b > a$) 的边界值是 2, 且这个函数的最大值也是 2, 求 b 的取值范围;
- (3) 将函数 $y = x^2$ ($-1 \leq x \leq m$, $m \geq 0$) 的图象向下平移 m 个单位, 得到的函数的边界值是 t, 当 m 在什么范围时, 满足 $\frac{3}{4} \leq t \leq 1$?

练习 3. 在平面直角坐标系 xOy 中，二次函数 $y=(a-1)x^2+2x+1$ 的图像与 x 轴有交点， a 为正整数.

(1) 求 a 的值.

(2) 将二次函数 $y=(a-1)x^2+2x+1$ 的图像先向右平移 m 个单位长度，再向下平移 m^2+1 个单位长度，当 $-2 \leq x \leq 1$ 时，二次函数有最小值 -3 ，求实数 m 的值.

练习 4. 已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2-2(a-1)x+a-2=0(a>0)$.

(1) 求证：方程有两个不等的实数根.

(2) 设方程的两个实数根分别为 x_1, x_2 (其中 $x_1 > x_2$). 若 y 是关于 a 的函数，且

$y=ax^2+x_1$ ，求这个函数的表达式.

(3) 在 (2) 的条件下，若使 $y \leq -3a^2+1$ ，则自变量 a 的取值范围为？