**江苏省仪征中学2022-2023学年度第二学期高一期末数学模拟卷5**

一、单选题（本大题共**8**小题，共**40.0**分。在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 如图，向量$\vec{AB}=\vec{a}$，$\vec{AC}=\vec{b}$，$\vec{CD}=\vec{c}$，则向量$\vec{BD}$可以表示为(    )

A. $\vec{a}+\vec{b}−\vec{c}$ B. $\vec{a}−\vec{b}+\vec{c}$ C. $\vec{b}−\vec{a}+\vec{c}$ D. $\vec{b}−\vec{a}−\vec{c}$

2. 已知复数$z=a^{2}+(a+1)i$，$a\in R$，若$z$是纯虚数，则$z$的共轭复数$\overset{−}{z}=$(    )

A. $i$ B. $−i$ C. $1$ D. $−1$

3. 袋中装有红球$3$个、白球$2$个、黑球$1$个，从中任取$2$个，则互斥而不对立的两个事件是  (    )

A.  至少有一个白球；都是白球 B.  至少有一个白球；至少有一个红球
C.  至少有一个白球；红、黑球各一个 D.  恰有一个白球；一个白球一个黑球

  4. 已知$100$个数据的第$75$百分位数是$9.3$，则下列说法正确的是(    )

A. 这$100$个数据中一定有$75$个数小于或等于$9.3$
B. 把这$100$个数据从小到大排列后，$9.3$是第$75$个数据
C. 把这$100$个数据从小到大排列后，$9.3$是第$75$个数据和第$76$个数据的平均数
D. 把这$100$个数据从小到大排列后，$9.3$是第$75$个数据和第$74$个数据的平均数

5. 已知$|\vec{a}|=1$，$\vec{b}=(1,\sqrt[ ]{3})$，$\vec{a}⊥(\vec{a}+\vec{b})$，则向量$\vec{a}$在向量$\vec{b}$上的投影向量为(    )

A. $(−1,−\sqrt[ ]{3})$ B. $(−\sqrt[ ]{3},−1)$ C. $\left(−\frac{1}{2},−\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}\right)$ D. $\left(−\frac{1}{4},−\frac{\sqrt[ ]{3}}{4}\right)$

6. 已知正方体$ABCD−A\_{1}B\_{1}C\_{1}D\_{1}$的棱长为$2,E,F$分别是棱$BC,CC\_{1}$的中点，动点$P$在正方形$BCC\_{1}B\_{1}($包括边界$)$内运动，若$PA\_{1}//$面$AEF$，则线段$PA\_{1}$的长度范围是(    )
A. $\left[2,\sqrt[ ]{5}\right]$ B. $\left[2,3\right]$ C. $\left[\frac{3\sqrt[ ]{2}}{2},3\right]$ D. $\left[\frac{3\sqrt[ ]{2}}{2},\sqrt[ ]{5}\right]$

  7. 若函数$f(x)=sin⁡ωx+\sqrt{3}cos⁡ωx(x\in R,ω>0)$，又$f(α)=−2,f(β)=0$，且$|α−β|$的最小值为$\frac{3π}{4}$，则函数$g(x)=f(x)−1$在$[−2π,0]$上零点的个数为(    )

A. $0$ B. $1$ C. $2$ D. $3$

8. 在锐角$△ABC$中，角$A$，$B$，$C$的对边分别为$a$，$b$，$c$，$△ABC$的面积为$S$，若$sin⁡(A+C)=\frac{2S}{b^{2}−c^{2}}$，则$tan⁡C+\frac{1}{2tan⁡(B−C)}$的最小值为$(    )$

A. $\sqrt[ ]{2}$ B. $2$ C. $1$ D. $2\sqrt[ ]{2}$

二、多选题（本大题共**4**小题，共**20.0**分。在每小题有多项符合题目要求）

9. 设$A$，$B$为两个互斥的事件，且$P(A)>0$，$P(B)>0$，则下列各式中正确的是(    )

A. $P(AB)=0$ B. $P(AB)=P(A)P(B)$
C. $ P(\overline{A}+\overline{B})=1$ D. $P(A+B)=P(A)+P(B)$

  10. 为唤起学生爱护地球、保护家园的意识，加强对节能减排的宣传，进一步营造绿色和谐的校园环境，树人中学决定举办环保知识竞赛$.$现有甲、乙、丙、丁四个班级参加，每个班级各派$10$位同学参赛，每位同学需要回答$10$道题，每题回答正确得$1$分，回答错误得$0$分$.$若规定总得分达到$70$分且没有同学得分低于$5$分的班级为“优胜班级”，则根据以下甲、乙、丙、丁各班参赛同学的得分数据信息，能判断该班一定为“优胜班级”的是(    )

A. 甲班同学平均数为$8$，众数为$8$ B. 乙班同学平均数为$8$，方差为$4$
C. 丙班同学平均数为$7$，极差为$3$ D. 丁班同学平均数为$7$，标准差为$0$

 11. 在$▵ABC$中，$∠A=90^{∘}$，$AB=3$，$AC=4$，点$D$为线段$AB$上靠近$A$点的三等分点，$E$为$CD$的中点，则下列结论正确的是(    )

A. $\vec{AE}=\frac{1}{6}\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{AC}$ B. $\vec{AE}$与$\vec{EB}$的夹角的余弦值为$\frac{15}{17}$
C. $\vec{AE}⋅\vec{CD}=−\frac{15}{2}$ D. $▵AED$的面积为$2$

12. 如图，在直角梯形$ABCD$中，$AB//CD$，$AD⊥AB$，$AB=2$，$DC=AD=1$，点$E$在线段$AB$上，现将$△ADE$沿$DE$折起为$△A′DE$，记二面角$A′−DE−C$的平面角为$α$，$A′O⊥$底面$BCDE$，垂足为$O$，则下列说法正确的是(    )


A. 不存在$α$，使得$BC⊥A′C$
B. 若$\vec{AE}=3\vec{EB}$，则存在$α$，使得平面$BCDE⊥$平面$A′CD$
C. 若$\vec{AE}=\frac{1}{3}\vec{EB}$，则四棱锥$A′−BCDE$体积的最大值为$\frac{\sqrt[ ]{5}}{12}$
D. 当$α=\frac{π}{2}$时，$OB$的最小值为$\frac{\sqrt[ ]{17}}{2}$

 三、填空题（本大题共**4**小题，共**20.0**分）

13. 若复数$z$满足$|z|=1$，则$\left|z−1−2i\right|$的取值范围是          。

14. 如图，从气球$A$上测得正前方的河流的两岸$B$，$C$的俯角分别为$75°$，$30°$，此时气球的高是$60m$，则河流的宽度$BC$等于\_\_\_\_\_\_．
15. 如图是蜂巢结构图的一部分，正六边形的边长为$1$，正六边形的顶点称为“晶格点”$.$若$A,B,C,D$四点均位于图中的“晶格点”处，且$A,B$的位置如图所示，则$\vec{AB}⋅\vec{CD}$的最大值为\_\_\_\_\_\_．
 14题图 15题图

16. 在边长为$3$的菱形$ABCD$中，$BD=3\sqrt[ ]{3}$，将菱形$ABCD$沿其对角线$AC$折成直二面角$B−AC−D$，若$A$，$B$，$C$，$D$四点均在某球面上，则该球的表面积为                   ．

  四、解答题（本大题共**6**小题，共**72.0**分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17. $($本小题$12.0$分$)$

已知$i$为虚数单位，复数$z=a+i(a\in R)$，$z+\frac{1}{z}$为实数．

$(1)$求实数$a$的值；$(2)$若复数$z$是方程$x^{2}+bx+c=0(b\in R$，$c\in R)$的一个根，求实数$b$，$c$的值．

18. $($本小题$12.0$分$)$
已知四棱锥$P−ABCD$的底面是菱形$.PB=PD$，$E$为$PA$的中点．
$(1)$求证：$PC//$平面$BDE;$
$(2)$求证：平面$PAC⊥$平面$BDE$。

19. $($本小题$12.0$分$)$

某银行柜台有从左到右编号依次为$1$，$2$，$3$，$4$，$5$，$6$的六个服务窗口，其中$1$，$2$，$3$，$4$，$5$号服务窗口办理$A$类业务，$6$号服务窗口办理$B$类业务．

$(1)$每天$12$：$00$至$14$：$00$，由于需要办理$A$类业务的顾客较少，现从$1$，$2$，$3$，$4$，$5$号服务窗口中随机选择$2$个窗口暂停服务，求“$1$号窗口或$2$号窗口暂停服务”的概率；

$(2)$经统计，在$6$号窗口办理$B$类业务的等候人数及相应概率如下：

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 排队人数 | $$0$$ | $$1$$ | $$2$$ | $$3$$ | $$4$$ | $4$人及$4$人以上 |
| 概率 | $$0.1$$ | $$0.16$$ | $$0.3$$ | $$0.3$$ | $$0.1$$ | $$0.04$$ |

求至少$2$人排队等侯的概率．

20. $($本小题$12.0$分$)$

$△ABC$的角$A$，$B$，$C$所对的边分别为$a$，$b$，$c$，点$D$在$BC$上，$AD=4$．

$(1)$若$AD⊥AC$，$cosC=\sqrt[ ]{2}sinB$，求$c$；

$(2)$若$AD$是$∠BAC$的角平分线，$∠BAC=\frac{2π}{3}$，求$△ABC$周长的最小值．

21. $($本小题$12.0$分$)$

已知四棱锥$P−ABCD$中，$△PBC$为正三角形，底面$ABCD$为直角梯形，$AD // BC$，$∠ADC=90°$，$AD=CD=3$，$BC=4$．

$(1)$设$F$为$BC$中点，问：在线段$AD$上是否存在这样的点$E$，使得平面$PAD⊥$平面$PEF$成立．若存在，求出$AE$的长；若不存在，请说明理由；

$(2)$已知$PD=\sqrt[ ]{13}$，

$①$求二面角$P−BC−A$的平面角的余弦值；$②$求直线$AC$和平面$PAD$所成角的正弦值．

22. $($本小题$12.0$分$)$
已知函数$f(x)=2sinxsin(\frac{π}{3}−x)+2cos^{2}x−\frac{1}{2}$．
$(1)$求函数$f(x)$的单调增区间；
$(2)$当$x\in (−\frac{π}{6},\frac{π}{4})$时，函数$g(x)=f^{2}(x)−2mf(x)+m^{2}−\frac{1}{16}$有四个零点，求实数$m$的取值范围．

**数学模拟卷5答案**

一、单选题（本大题共**8**小题，共**40.0**分。在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1、*C*  2、*B*  3、*C*  4. *C*  5、*D*

6. *D* 解：由题意，取$BB\_{1}$的中点$G$，$B\_{1}C\_{1}$的中点$H$，连接$A\_{1}H$，$A\_{1}G$，$GH$，$D\_{1}F$，$AD\_{1}$，作图如下：
在正方体$ABCD−A\_{1}B\_{1}C\_{1}D\_{1}$中，易知$A\_{1}G//D\_{1}F$，$A\_{1}H//AE$，$EF//AD\_{1}$，

则$A,E,F,D\_{1}$共面，$∵A\_{1}G⊄$平面$AEFD\_{1}$，$D\_{1}F⊂$平面$AEFD\_{1}$，

$∴A\_{1}G//$平面$AEFD\_{1}$，同理可得：$A\_{1}H//$平面$AEFD\_{1}$，$∵A\_{1}H∩A\_{1}G=A\_{1}$，$∴$平面$A\_{1}GH//$平面$AEFD\_{1}$，当$A\_{1}P⊂$平面$A\_{1}GH$时，$A\_{1}P//$平面$AEFD\_{1}$，

$∵$正方体$ABCD−A\_{1}B\_{1}C\_{1}D\_{1}$的棱长为$2$，在$Rt▵A\_{1}B\_{1}H$中，$A\_{1}B \_{1}^{2}+B\_{1}H^{2}=A\_{1}H^{2}$，解得$A\_{1}H=\sqrt[ ]{5}$，同理$A\_{1}G=\sqrt[ ]{5}$，在$Rt▵B\_{1}GH$中，$B\_{1}G^{2}+B\_{1}H^{2}=GH^{2}$，解得$GH=\sqrt[ ]{2}$，则$▵A\_{1}GH$中边$GH$上的高$ℎ=\sqrt[ ]{A\_{1}G^{2}−\left(\frac{1}{2}GH\right)^{2}}=\frac{3\sqrt[ ]{2}}{2}$，即$A\_{1}P\in \left[\frac{3\sqrt[ ]{2}}{2},\sqrt[ ]{5}\right]$，

7. *B* 解：$f(x)=sinωx+\sqrt[ ]{3}cosωx=2sin(ωx+\frac{π}{3}).∵|α−β|$的最小值为$\frac{3π}{4}$，$∴\frac{T}{4}=\frac{3π}{4}$，则$T=3π$，
又$∵ω>0$，$∴ω=\frac{2π}{3π}=\frac{2}{3}$．$∴g(x)=f(x)−1=2sin(\frac{2}{3}x+\frac{π}{3})−1$，由$g(x)=0$，得$sin(\frac{2}{3}x+\frac{π}{3})=\frac{1}{2}$，
$∴\frac{2}{3}x+\frac{π}{3}=2kπ+\frac{π}{6}$或$\frac{2}{3}x+\frac{π}{3}=2kπ+\frac{5π}{6}(k\in Z)$，即$x=3kπ−\frac{π}{4}$或$x=3kπ+\frac{3π}{4}(k\in Z).$
当且仅当$k=0$时，有$x=−\frac{π}{4}$符合题意．$∴$函数$g(x)=f(x)−1$在$[−2π,0]$上零点的个数为$1$．
8. *A* 解：因为$sin(A+C)=\frac{2S}{b^{2}−c^{2}}$，所以$sinB=\frac{acsinB}{b^{2}−c^{2}}$，又$sinB\ne 0$，
所以$b^{2}−c^{2}=ac$．由余弦定理得：$b^{2}−c^{2}=a^{2}−2accosB=ac$，即：$a−2ccosB=c$．
由正弦定理得：$sinA−2sinCcosB=sinC$．所以$sin(B+C)−2sinCcosB=sinC$，
$sinBcosC−sinCcosB=sinC$，所以$sin(B−C)=sinC$，因此，在锐角$△ABC$中，有$B−C=C$，或$B−C+C=π($舍去$)$，即$B=2C$．因为$△ABC$是锐角三角形，所以$\left\{\begin{matrix}0<C<\frac{π}{2}\\0<2C<\frac{π}{2}\\0<π−3C<\frac{π}{2}\end{matrix}\right.$，得$\frac{π}{6}<C<\frac{π}{4}$，即$tanC\in (\frac{\sqrt[ ]{3}}{3},1)$，所以$tanC+\frac{1}{2tan (B−C)}=tanC+\frac{1}{2tanC}⩾2\sqrt[ ]{\frac{1}{2}}=\sqrt[ ]{2}$，当且仅当$tanC=\frac{1}{2tanC}$，即$tanC=\frac{\sqrt[ ]{2}}{2}$时取等号．所以$tanC+\frac{1}{2tan (B−C)}$的最小值为$\sqrt[ ]{2}$．
9. *ACD*  10. *CD*   11.*AC*

12. *BC* 解：作$AF⊥DE$，垂足为$F$，点$O$在直线$AF$上，对于$A$，当$E$为$AB$的中点且$α=90°$时，$AC⊥DE$，垂足为$F$，由已知可得$BC⊥CF$，又$AC∩CF=C$，$AC$，$CF⊂$平面$A′FC$，所以$BC⊥$平面$A′FC$，又$A′C⊂$平面$A′FC$，则$BC⊥A′C$，故选项*A*错误；
对于$B$，当$\vec{AE}=3\vec{EB}$时，$AF∩DC=G$，当点$O$即为点$G$时，$A′G⊥$平面$BCDE$，又$A′G⊂$平面$A′CD$，所以平面$BCDE⊥$平面$A′CD$，故选项*B*正确；
对于$C$，当$\vec{AE}=\frac{1}{3}\vec{EB}$时，$AF∩BC=H$，
若四棱锥$A′−BCDE$的体积最大，则$A′F⊥DE$，即点$O$为点$F$，
此时$AE=\frac{1}{2}．AF=A′F=\frac{\sqrt[ ]{5}}{5}$，则四棱锥$A′−BCDE$的体积为$\frac{1}{3}×\frac{\sqrt[ ]{5}}{5}×[\frac{1}{2}×(1+2)×1−\frac{1}{2}×1×\frac{1}{2}]=\frac{\sqrt[ ]{5}}{12}$，故选项*C*正确；
对于$D$，点$O$的轨迹是以$AD$为直径的一段圆弧，记$AD$的中点为$M$，
则$OB$的最小值为$MB−\frac{1}{2}AD=\frac{\sqrt[ ]{17}}{2}−\frac{1}{2}$，故选项*D*错误．
13. $\left[\sqrt[ ]{5}−1,\sqrt[ ]{5}+1\right]$

14. $120($ $\sqrt[ ]{3}−1)m$

 15. $24$

解：建立如图的直角坐标系，则$A(\frac{\sqrt[ ]{3}}{2},\frac{9}{2})$，$B(0,0)$，由图可知，$\vec{AB}=\vec{CD\_{1}}$，
要使$\vec{AB}⋅\vec{CD}$最大，需$C(0,5)$，当$C(0,5)$时，$D$的位置可以有三个位置，
其中$D\_{1}(−\frac{\sqrt[ ]{3}}{2},\frac{1}{2})$，$D\_{2}(−\sqrt[ ]{3},0)$，$D\_{3}(−\frac{3\sqrt[ ]{3}}{2},\frac{1}{2})$，此时$\vec{AB}=(−\frac{\sqrt[ ]{3}}{2},−\frac{9}{2})$，
$\vec{CD\_{1}}=(−\frac{\sqrt[ ]{3}}{2},−\frac{9}{2})$，$\vec{CD\_{2}}=(−\sqrt[ ]{3},−5)$，$\vec{CD\_{3}}=(−\frac{3\sqrt[ ]{3}}{2},−\frac{9}{2})$，
则$\vec{AB}⋅\vec{CD\_{1}}=21$，$\vec{AB}⋅\vec{CD\_{2}}=24$，$\vec{AB}⋅\vec{CD\_{3}}=22.5$，
则$\vec{AB}⋅\vec{CD}$的最大值为$24$，
16. $15π$

解：  取$AC$中点$G$，连接$BG$，$DG$，则$BG⊥AC$，$DG⊥AC$，如图，
$∵$在边长为$3$的菱形$ABCD$中，$BD=3\sqrt[ ]{3}$，

$∴DG=\frac{3}{2}\sqrt[ ]{3}⇒cos∠GDA=\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}⇒∠GDA=\frac{π}{6}⇒∠ADC=\frac{π}{3}$，
$∴ΔABC$与$ΔACD$均为边长为$3$的等边三角形．
$∵$平面$ABC⊥$平面$ACD$，交线为$AC$，而$BG⊂$平面$ABC$，$∴BG⊥$平面$ACD.$ 分别取$ΔACD$与$ΔABC$的外心$E$，$F$，过$E$，$F$分别作两面的垂线，
相交于$O$，  则$O$为三棱锥$A−BCD$的外接球的球心．由$ΔACD$与$ΔABC$均为等边三角形且边长为$3$， 可得$OE=OF=\frac{1}{3}DG=\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}$，
$∴DE=DG−GE=\sqrt[ ]{3}$，$∴OD=\sqrt[ ]{OE^{2}+ED^{2}}=\sqrt[ ]{(\frac{\sqrt[ ]{3}}{2})^{2}+(\sqrt[ ]{3})^{2}}=\frac{\sqrt[ ]{15}}{2}$， 即三棱锥外接球的半径：$R=OD=\frac{\sqrt[ ]{15}}{2}$，$∴$表面积为：$4π×R^{2}=4π×(\frac{\sqrt{15}}{2})^{2}=15π$．故答案为$15π$．

17. 解：$(1)$由$z+\frac{1}{z}=(a+i)+\frac{1}{a+i}=a+i+\frac{a−i}{(a+i)(a−i)}=a+i+\frac{a−i}{a^{2}+1}$，$=(a+\frac{a}{a^{2}+1})+(1−\frac{1}{a^{2}+1})i=(a+\frac{a}{a^{2}+1})+\frac{a^{2}}{a^{2}+1}i$，由$z+\frac{1}{z}$为实数，有$\frac{a^{2}}{a^{2}+1}=0$，解得$a=0$．
$(2)$由$(1)$可知$z=i$，将$z=i$代入方程$x^{2}+bx+c=0$，有$i^{2}+bi+c=0$，整理为$bi+(c−1)=0$，
由复数相等有$\left\{\begin{matrix}b=0\\c−1=0\end{matrix}\right.$解得$\left\{\begin{matrix}b=0\\c=1\end{matrix}\right.$，故$b=0$，$c=1$．

18. 证明：$(1)$设$AC$、$BD$交于点$O$，连结$OE$，$∵$四棱锥$P−ABCD$的底面是菱形，$∴O$是$AC$中点，
$∵E$为$PA$的中点，$∴OE//PC$，$∵OE⊂$平面$BDE$，$PC⊄$平面$BDE$，$∴PC//$平面$BDE$．
$(2)$连结$PO$，$∵$四棱锥$P−ABCD$的底面是菱形，$PB=PD$，$E$为$PA$的中点，$∴AC⊥BD$，$BD⊥PO$，
$∵PO∩AC=O$，$PO$，$AC⊂$平面$PAC$，$∴BD⊥$平面$PAC$，
$∵BD⊂$平面$BDE$，$∴$平面$PAC⊥$平面$BDE$．

19.解：$(1)$记事件$A$为“$1$号窗口或$2$号窗口暂停服务”，
用$(i,j)$表示编号分别为$i$，$j$号的窗口暂停服务．
则样本空间为：$Ω=\{(1,2)$，$(1,3)$，$(1,4)$，$(1,5)$，$(2,3)$，$(2,4)$，$(2,5)$，$(3,4)$，$(3,5)$，$(4,5)\}$，共包含$10$个样本点；
而$A=\{(1,2)$，$(1,3)$，$(1,4)$，$(1,5)$，$(2,3)$，$(2,4)$，$(2,5)\}$，共包含$7$个样本点．因此$P(A)=\frac{7}{10}$．答：$1$号窗口或$2$号窗口暂停服务的概率为$\frac{7}{10}$．
$(2)$记事件“$6$号窗口办理$B$类业务的等候人数为$k$”即为$B\_{k}$，$(k\in N)$，
则事件$B\_{k}$两两互斥，即事件“至少$2$人排队等侯”为$B$，则事件$\overline{B}$“排队等候人数为$0$或$1$”，
所以$P(\overline{B})=P(B\_{0})+P(B\_{1})=0.1+0.16=0.26$，所以$P(B)=1−P(\overline{B})=1−0.26=0.74$．
答：至少$2$人排队等侯的概率为$0.74$．

20. 解：$(1)∵AD⊥AC$，$∴∠DAC=\frac{π}{2}$，$∠ADB=\frac{π}{2}+C$，$∵cosC=\sqrt[ ]{2}sinB$，$∴sin∠ADB=sin(\frac{π}{2}+C)=cosC=\sqrt[ ]{2}sinB$，在$△ABD$中，由正弦定理得$\frac{AB}{sin∠ADB}=\frac{AD}{sinB}$即$\frac{AB}{\sqrt[ ]{2}sinB}=\frac{4}{sinB}$，$∴c=AB=4\sqrt[ ]{2}$．
$(2)∵∠BAC=\frac{2π}{3}$，$AD$是$∠BAC$的角平分线，$∴∠BAD=∠DAC=\frac{π}{3}$，由$S\_{△ABC}=S\_{ΔABD}+S\_{ΔADC}$得
$\frac{1}{2}AB⋅ACsin\frac{2π}{3}=\frac{1}{2}AB⋅ADsin\frac{π}{3}+\frac{1}{2}AC⋅ADsin\frac{π}{3}$．又$AD=4$，$∴4(b+c)=bc$，在$△ABC$中，由余弦定理得$a^{2}=b^{2}+c^{2}+bc$，则$a=\sqrt[ ]{b^{2}+c^{2}+bc}$．设$△ABC$的周长为$l$，$l=a+b+c=\sqrt[ ]{b^{2}+c^{2}+bc}+\frac{1}{4}bc$，由基本不等式得，$4(b+c)=bc\geq 8\sqrt[ ]{bc}$，当且仅当$b=c$时等号成立，得$bc\geq 64$．
$l=a+b+c=\sqrt[ ]{b^{2}+c^{2}+bc}+\frac{1}{4}bc\geq \sqrt[ ]{3bc}+\frac{1}{4}bc\geq 16+8\sqrt[ ]{3}$，当且仅当$b=c$时等号成立，
所以$△ABC$的周长最小值为$16+8\sqrt[ ]{3}$．

21. 解：$(1)$存在这样的$E$点，且当$AE=1$时过点$F$作$FE//CD$交$AD$于点$E$，$∵△PBC$为正三角形，
$∴PF⊥BC$，$∵AD//BC$，$∴PF⊥AD$，又$∵FE//CD$，$CD⊥AD$，$∴EF⊥AD$，$∵PF∩EF=F$，$PF$、$EF⊂$平面$PEF$，$∴AD⊥$平面$PEF$，$∵AD⊂$平面$PAD$，故平面$PAD⊥$平面$PEF$；
$(2) ①$由$(1)$知，$PF⊥BC$，$EF⊥BC$，$∴∠PFE$即为所求二面角$P−BC−A$的平面角．由$AD⊥$平面$PEF$，$PE⊂$平面$PEF$，则$AD⊥PE$，
在$△PED$中，$∵PD=\sqrt[ ]{13}$，$DE=2$，$∴PE=3$，又正$△PBC$，$BC=4$，则$PF=2\sqrt[ ]{3}$，$∴$在$△PEF$中，$EF=DC=3$，由余弦定理得$cos∠PFE=\frac{3^{2}+(2\sqrt[ ]{3})^{2}−3^{2}}{2×3×2\sqrt[ ]{3}}=\frac{\sqrt[ ]{3}}{3}$，$ ②$设$AC$与平面$PAD$所成角为$θ$，设$d$为点$C$到平面$PAD$的距离，则$sinθ=\frac{d}{AC}$，$∵AD=DC=3$，$∠ADC=90°$，$∴AC=3\sqrt[ ]{2}$，
$∵AD//BC$，$AD⊂$平面$PAD$，$BC⊄$平面$PAD$，$∴BC//$平面$PAD$，则$C$到平面$PAD$的距离等于$F$点到平面$PAD$的距离．由$(1)$知，$F$到平面$PAD$的距离等于$F$到$PE$的距离，在$△PEF$中，$PE=EF=3$，$PF=2\sqrt[ ]{3}$，$cos∠PFE=\frac{\sqrt[ ]{3}}{3}$，$∴sin∠PFE=\frac{\sqrt[ ]{6}}{3}$，则$S\_{△PEF}=\frac{1}{2}×3×2\sqrt[ ]{3}×\frac{\sqrt[ ]{6}}{3}=3\sqrt[ ]{2}$，又$S\_{△PEF}=\frac{1}{2}×d×PE=\frac{3}{2}d$，
$∴\frac{3}{2}d=3\sqrt[ ]{2}$，$∴d=2\sqrt[ ]{2}$．$∴sinθ=\frac{2\sqrt[ ]{2}}{3\sqrt[ ]{2}}=\frac{2}{3}$，即直线$AC$与平面$PAD$所成角的正弦值为$\frac{2}{3}$．

22. 解：函数$f(x)=2sinxsin(\frac{π}{3}−x)+2cos^{2}x−\frac{1}{2}=2sinx(\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}cosx−\frac{1}{2}sinx)+2cos^{2}x−\frac{1}{2}=\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}sin2x−sin^{2}x+1+cos2x−\frac{1}{2}=\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}sin2x−\frac{1−cos2x}{2}+1+cos2x−\frac{1}{2}=\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}sin2x+\frac{3}{2}cos2x$
$=\sqrt[ ]{3}sin(2x+\frac{π}{3})$，$(1)$令$2x+\frac{π}{3}\in [2kπ−\frac{π}{2},2kπ+\frac{π}{2}]k\in Z$，解得$x\in [kπ−\frac{5}{12}π,kπ+\frac{π}{12}]k\in Z$，即为函数$f(x)$的单调递增区间；
$(2)$由$g(x)=f^{2}(x)−2mf(x)+m^{2}−\frac{1}{16}=[f(x)−m]^{2}−\frac{1}{16}$，令$g(x)=0$，得$f(x)=m\pm \frac{1}{4}$；因$g(x)$有四个零点，即$m+\frac{1}{4}=f(x)$和$m−\frac{1}{4}=f(x)$各有两个零点，故对于函数$f(x)$一个函数值对应两个自变量的函数值的取值范围，又因$x\in (−\frac{π}{6},\frac{π}{4})$时，$2x+\frac{π}{3}\in (0,\frac{5π}{6})$，$∴\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}<m+\frac{1}{4}<\sqrt[ ]{3}$且$\frac{\sqrt[ ]{3}}{2}<m−\frac{1}{4}<\sqrt[ ]{3}$，解得，$\frac{1+2\sqrt[ ]{3}}{4}<m<\sqrt[ ]{3}−\frac{1}{4}$即：$\{m|\frac{1+2\sqrt[ ]{3}}{4}<m<\sqrt[ ]{3}−\frac{1}{4}\}.$