1. 已知函数$f(x)=2\cos x\sin(x+\frac{\pi}{6})$.

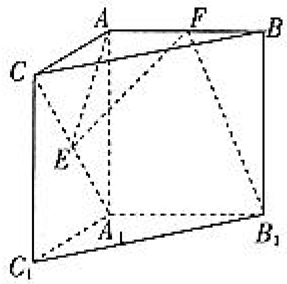
(1)求$f(x)$的最小正周期及$f(x)$在区间$[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}]$上的最大值

(2)在锐角$\triangle ABC$中，$f(\frac{A}{2})=\frac{3}{2}$，且$a=\sqrt{3}$，求$b+c$取值范围.

2. 如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AA_1\perp$底面$A_1B_1C_1$，$AC\perp AB$，$AC=2$，$AB=4$，$AA_1=6$，点E，F分别为CA_1与AB的中点.

(1)证明：$EF//$平面BCC_1B_1；

(2)求二面角$E-B_1F-A$的平面角的正切值.



1. 已知函数$f(x)=2\cos x\sin(x+\frac{\pi}{6})$.

(1)求$f(x)$的最小正周期及$f(x)$在区间$[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}]$上的最大值

(2)在锐角△ABC中，$f(\frac{A}{2})=\frac{3}{2}$，且$a=\sqrt{3}$，求$b+c$取值范围.

解：(1)函数$f(x)=2cosxsin(x+\frac{\pi}{6})=2cosx(\frac{\sqrt{3}}{2}sinx+\frac{1}{2}cosx)=\frac{\sqrt{3}}{2}sin2x+\cos^2x=\frac{\sqrt{3}}{2}sin2x+\frac{cos2x}{2}+\frac{1}{2}=\sin(2x+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$. 所以函数的最小正周期为$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$．当$x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}]$，所以$2x+\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}]$，当$x=\frac{\pi}{6}$时，函数的最大值为$\frac{3}{2}$.

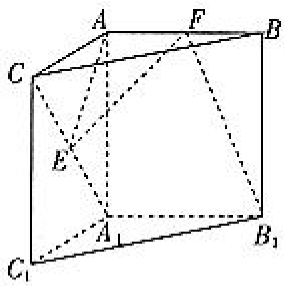
(2)由于在锐角$\triangle ABC$中，$f(\frac{A}{2})=\frac{3}{2}$，所以$\sin(A+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，解得$A=\frac{\pi}{3}$. 利用正弦定理$2R=\frac{a}{sinA}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$，所以$b=2RsinB$，$c=2RsinC$，由于$C=\frac{2\pi}{3}-B<\frac{\pi}{2}$，所以$\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$.

所以$b+c=2(sinB+sinC)=2sinB+2sin(\frac{2\pi}{3}-B)=2\sqrt{3}\sin(B+\frac{\pi}{6})$，由于$\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$，

所以$\frac{\pi}{3}<B+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$，故$\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin(B+\frac{\pi}{6})\le 1$，故$3<b+c\le 2\sqrt{3}$.

即$b+c$的取值范围为$(3,2\sqrt{3}]$.

2. 如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AA_1\perp$底面$A_1B_1C_1$，$AC\perp AB$，$AC=2$，$AB=4$，$AA_1=6$，点E，F分别为CA_1与AB的中点.



(1)证明：$EF//$平面BCC_1B_1；

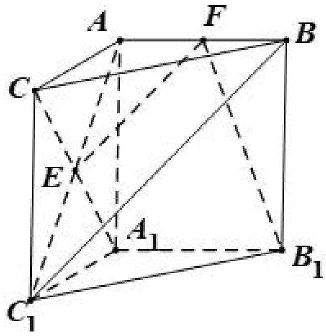
(2)求二面角$E-B_1F-A$的平面角的正切值.

(1)证明：如图：在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，因为$AA_1\perp$底面$A_1B_1C_1$，所以三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$是直三棱柱，因此四边形AA_1C_1C是矩形.

又因为点E是CA_1的中点，所以连接AC_1，则E是AC_1的中点.

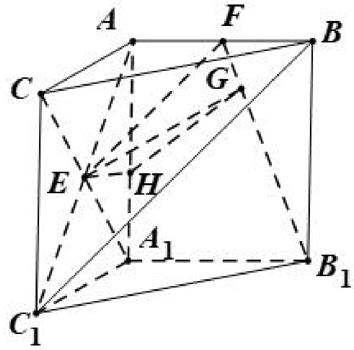
连接BC_1，因为F是AB的中点，所以$EF//BC_1$.

因为$BC_1\subset$平面BCC_1B_1，$EF\not\subset$平面BCC_1B_1，所以$EF//$平面BCC_1B_1.



(2)解：由(1)知：三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$是直三棱柱，

所以$AA_1\perp AC$，$AA_1\perp AB$，因此$\angle CAB$是二面角$C-AA_1-B$的平面角．又因为$AC\perp AB$，所以$\angle CAB=\frac{\pi}{2}$，因此平面$CAA_1\perp$平面AA_1B．由(1)知：四边形AA_1C_1C是矩形，如下图：取AA_1的中点H，连接EH．因为点E是CA_1的中点，所以$EH\perp AA_1$．因为平面$CAA_1\perp$平面AA_1B交于AA_1，$EH\subset$平面CAA_1，所以$EH\perp$平面AA_1B，而$B_1F\subset$平面AA_1B，因此$EH\perp B_1F$．过H在平面AA_1B_1B内，作$HG\perp B_1F$交B_1F于G，连接EG．因为$EH\cap HG=H$，$EH,HG\subset$平面EGH，所以$B_1F\perp$平面EGH，而$EG\subset$平面EGH，因此$B_1F\perp EG$，因此$\angle EGH$是二面角$E-B_1F-A$的平面角．因为$AC=2$，所以$EH=1$．又因为$AB=4$，$AA_1=6$，F是AB的中点，所以在矩形AA_1B_1B内，利用面积等量得：$24=\frac{1}{2}(3\times 2+3\times 4+6\times 2)+\frac{1}{2}B_1F\times GH$，而$B_1F=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$，因此$GH=\frac{9}{\sqrt{10}}$. 在$Rt\triangle EGH$中，$\tan\angle EGH=\frac{EH}{GH}=\frac{\sqrt{10}}{9}$，因此二面角$E-B_1F-A$的平面角的正切值为$\frac{\sqrt{10}}{9}$.



3. 已知在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，其中 $\tan 2C=\frac{3}{4}$, C为钝角，且$\frac{b}{a}\cos A=2\cos B$.

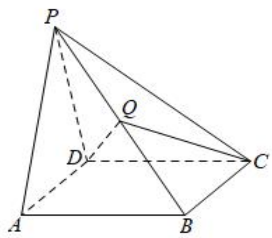
(1)求角B的大小;

(2)若$\triangle ABC$的面积为 6，求$\triangle ABC$的周长.

4. 如图，在四棱锥$P-\mathrm{ABCD}$ 中，底面为正方形，$\triangle \mathrm{PAD}$ 为等边三角形，平面$PAD\perp$平面PCD.

(1)证明：平面$PAD\perp$平面$ABCD$；

(2)若 $\mathrm{AB}=2$，Q为线段的中点，求三棱锥$Q-\mathrm{PCD}$ 的体积.



3. 已知在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，其中 $\tan 2C=\frac{3}{4}$，C为钝角，且$\frac{b}{a}\cos A=2\cos B$.

(1)求角B的大小;

(2)若$\triangle ABC$的面积为 6，求$\triangle ABC$的周长．

解: (1)依题意，有$b\cdot\cos A=2a\cdot\cos B$，由正弦定理，得$\sin B\cdot\cos A=2\sin A\cdot\cos B$，则$\tan B=2\tan A$;

$\because \tan 2C=\frac{2\tan C}{1-\tan^2 C}=\frac{3}{4}$，$\therefore 3\tan^2 C+8\tan C-3=0$，$\because C$为钝角，$\therefore \tan C=-3$($\tan C=\frac{1}{3}$舍去)，

$\therefore \tan C=\tan[\pi-(A+B)]=-\tan(A+B)=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}=\frac{3\tan B}{\tan^2 B-2}=-3$，

解得 $\tan B=1$($\tan B=-2$ 舍去)，即$B=\frac{\pi}{4}$.

(2) $\because \tan C=-3$，$\therefore \sin C=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\cos C=-\frac{\sqrt{10}}{10}$; $\because A+B+C=\pi$，$\therefore A=\pi-(B+C)$，$\therefore \sin A=\sin[\pi-(B+C)]=\sin(B+C)=\sin B\cdot\cos C+\cos B\cdot\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}\times(-\frac{\sqrt{10}}{10})+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{5}}{5}$. 由正弦定理，得$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，$a=\frac{c\cdot\sin A}{\sin C}$，$\therefore a=c\times\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{10}{3\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{3}c$，

$\therefore\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{3}c\times c\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{c^2}{6}=6$，解得$c=6$，$a=2\sqrt{2}$，

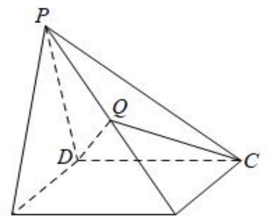
由正弦定理，得$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，$\therefore b=\frac{c\cdot\sin B}{\sin C}=6\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{10}{3\sqrt{10}}=2\sqrt{5}$，

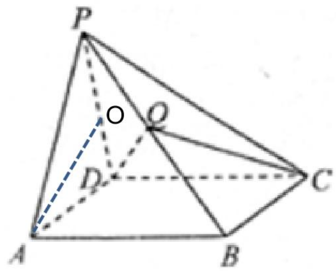
$\therefore\triangle ABC$的周长为 $2\sqrt{2}+2\sqrt{5}+6$.

4. 如图，在四棱锥$P-$ABCD 中，底面为正方形，$\triangle$ PAD 为等边三角形，平面PAD⊥平面PCD.

(1)证明：平面PAD⊥平面$ABCD$;

(2)若 AB $=$ 2，Q为线段的中点，求三棱锥$Q-$PCD 的体积.



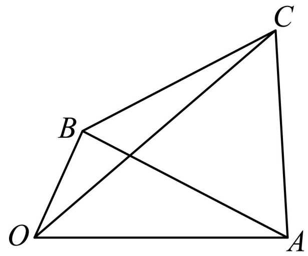


(1)证明：取PD的中点O，连结AO，因为$\triangle PAD$为等边三角形，所以$AO\perp PD$，又因为$AO\subset$平面PAD，平面$PAD\cap$平面$PCD=PD$，平面$PAD\perp$平面PCD，所以$AO\perp$平面PCD，因为$CD\subset$平面PCD，所以$AO\perp CD$，因为底面$ABCD$为正方形所以$CD\perp AD$，因为$AO\cap AD=A$，AO，$AD\subset$平面PAD，所以$CD\perp$平面PAD，又因为$CD\subset$平面$ABCD$，所以平面$PAD\perp$平面$ABCD$;

(2)解：由(1)得$AO\perp$平面PCD，所以A到平面PCD的距离$d=AO=\sqrt{3}$，因为底面$ABCD$为正方形所以$AB//CD$，又因为$AB\not\subset$平面PCD，$CD\subset$平面PCD，所以$AB//$平面PCD，所以A，B两点到平面PCD的距离相等，均为d，又Q为线段PB的中点，所以Q到平面PCD的距离$h=\frac{d}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，由(1)知，$CD\perp$平面$PAD$，因为$PD\subset$平面$PAD$，

所以$CD\perp PD$，所以$V_{Q-PCD}=\frac{1}{3}\times S_{\Delta PCD}\times h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

5. 如图，四边形$OACB$中，$OA=2, OB=1$，三角形ABC为正三角形.



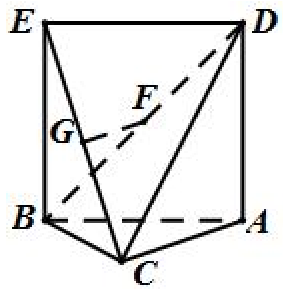
(1)当$\angle AOB=\frac{\pi}{3}$时，设$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，求$x, y$的值；

(2)设$\angle AOB=\theta(0<\theta<\pi)$，则当$\theta$为多少时，段$OC$的长最大，最大值是多少？

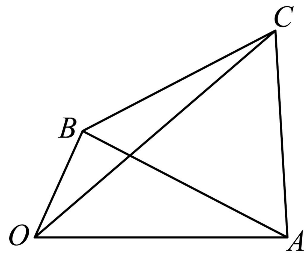
6. 如图所示，在四棱锥$C-ABED$中，四边形$ABED$是正方形，点G，F分别是线段EC，BD的中点.

(1)求证：GF //平面ABC；

(2)线段BC上是否存在一点H，使得平面GFH //平面ACD.若存在，请求出点H并证明；若不存在，请说明理由.



5. 如图，四边形$OACB$中，$OA=2,OB=1$，三角形ABC为正三角形.



(1)当$\angle AOB=\frac{\pi}{3}$时，设$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，求$x,y$的值；

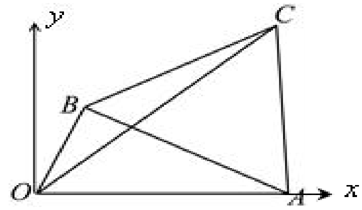
(2)设$\angle AOB=\theta(0<\theta<\pi)$，则当$\theta$为多少时，段$OC$的长最大，最大值是多少？

解：(1)在$\triangle AOB$中，$\because OA=2,OB=1$，$\angle AOB=\frac{\pi}{3}$，

$\therefore AB=\sqrt{3},\angle OAB=\frac{\pi}{6}$，$\angle OBA=\frac{\pi}{2}$，$\angle OAC=\frac{\pi}{2}$，

解法一：

以 O 为坐标原点，射线 OA 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系.



由 $OB=1,\angle AOB=\frac{\pi}{3}$，得 $B(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$．由 $OA=2,AC=\sqrt{3}$，$\angle OAC=\frac{\pi}{2}$

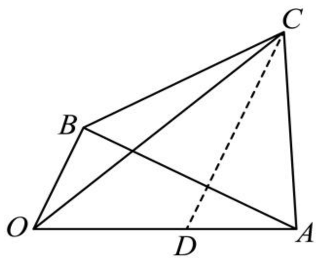
得 $C(2,\sqrt{3})$

由 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ 及 $\overrightarrow{OC}=(2,\sqrt{3}),\overrightarrow{OA}=(2,0),\overrightarrow{OB}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$

得 $(2,\sqrt{3})=x(2,0)+y(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})=(2x+\frac{1}{2}y,\frac{\sqrt{3}}{2}y)$，解得 $x=\frac{1}{2},y=2$．

解法二：

过点 C 作 $CD//OB$ 交 OA 于点 D，



在$\triangle ACD$中 $AC=\sqrt{3},\angle OAC=\frac{\pi}{2}$，$\angle CDA=\frac{\pi}{3}$，

$\therefore CD=2,DA=1,\therefore OD=1$，

$\therefore \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$，$\therefore x=\frac{1}{2},y=2$

(2)由正弦定理得 $\frac{AB}{\sin\theta}=\frac{OB}{\sin\angle OAB}$，即 $\sin\angle OAB=\frac{OB\sin\theta}{AB}=\frac{\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}$，

所以 $\cos\angle OAB=\frac{2-\cos\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}$，所

以 $\cos\angle OAC=\cos(\angle OAB+\frac{\pi}{3})=\cos\angle OAB\cos\frac{\pi}{3}-\sin\angle OAB\sin\frac{\pi}{3}$，

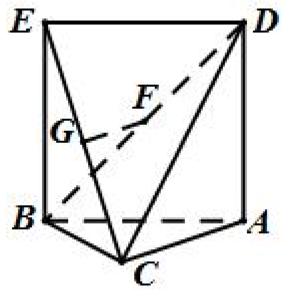
$=\frac{2-\cos\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}\times\frac{1}{2}-\frac{\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{2\sqrt{5-4\cos\theta}}$，

由余弦定理得 $OC^2=4+5-4\cos\theta-2\times2\times\sqrt{5-4\cos\theta}\times\frac{2-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{2\sqrt{5-4\cos\theta}}=5+2\sqrt{3}\sin\theta-2\cos\theta=5+4\sin(\theta-\frac{\pi}{6})$，因为 $\theta\in(0,\pi)$，所以当 $\theta=\frac{2\pi}{3}$时，OC 取得最大值 3.

6. 如图所示，在四棱锥$C-ABED$中，四边形$ABED$是正方形，点G，F分别是线段EC，BD的中点.

(1)求证：GF //平面ABC；

(2)线段BC上是否存在一点H，使得平面GFH //平面ACD.若存在，请求出点H并证明；若不存在，请说明理由.



证明：(1)由四边形$ABED$为正方形可知，连接AE必与BD相交于中点F，

故 $GF//AC$，$\because GF\not\subset$面ABC，$AC\subset$面ABC，$\therefore GF//$面ABC，

解：(2)线段BC上存在一点H满足题意，且点H是BC中点，

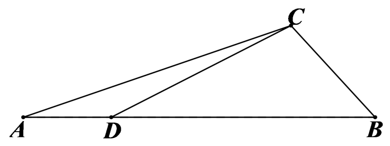
理由如下：由点G，H分别为CE，CB中点可得：$GH//EB//AD$，$\because GH\not\subset$面ACD，$AD\subset$面ACD，

$\therefore GH//$面ACD，由(1)可知，$GF//AC$，$GF\not\subset$面ACD，$AC\subset$面ACD，$\therefore GF//$面ACD，且$GF\cap GH=G$，GF、$GH\subset$面GFH，故面$GFH//$面ACD.

7. 已知在ΔABC中，D为边AB上的点，且$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$，$BC=2$.

(1)　若$AB=4$，$\sin\angle CDB=\frac{2}{3}$，求边$AC$的长；

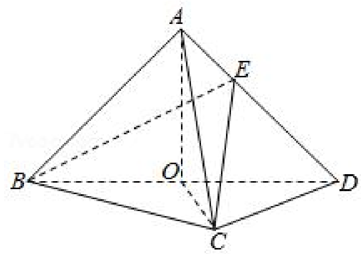
(2)　若$\frac{CD}{DB}=\frac{2}{3}$，设$\angle CDB=\theta,\theta\in(0,\pi)$，试将$\Delta ABC$的面积$S$表示为$\theta$的函数，并求函数$y=S(\theta)$最大值.



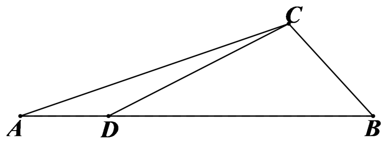
8. 如图，在三棱锥$A-BCD$中，平面$ABD\perp$平面BCD，$AB=AD$，O为BD的中点.

(1)证明：$OA\perp CD$；

(2)若ΔOCD是边长为 1 的等边三角形，点E在棱AD上，$DE=2EA$，且二面角$E-BC-D$的大小为$45°$，求三棱锥$A-BCD$的体积.



7. 已知在ΔABC中，D为边AB上的点，且$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$，$BC=2$.



(1)　若$AB=4$，$\sin\angle CDB=\frac{2}{3}$，求边$AC$的长；

(2)　若$\frac{CD}{DB}=\frac{2}{3}$，设$\angle CDB=\theta,\theta\in(0,\pi)$，试将$\Delta ABC$的面积$S$表示为$\theta$的函数，并求函数$y=S(\theta)$最大值.

解：(1)由 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$ ，$AB=4$ ，则 $DB=3$ ，

在 ΔBCD 中，$\frac{BC}{sin\angle CDB}=\frac{DB}{sin\angle DCB}\Rightarrow\frac{2}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{sin\angle DCB}\Rightarrow sin\angle DCB=1$ $\because\angle DCB\in(0,\pi)$, $\therefore\angle DCB=90°$ ，

$\therefore\cos\angle DBC=\sin\angle CDB=\frac{2}{3}$，在 ΔABC 中，由余弦定理得：$AC=\sqrt{2^2+4^2-2\cdot2\cdot4\cdot\frac{2}{3}}=\frac{2\sqrt{21}}{3}$

(2)由 $\frac{CD}{DB}=\frac{2}{3}$ ，设 $DB=3t$, 则$CD=2t$, $\because\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$, $\therefore AD=t$ ，在 ΔBCD 中，由余弦定理得：$4=4t^2+9t^2-2\cdot2t\cdot3t\cdot\cos\theta\Rightarrow t^2=\frac{4}{13-12\cos\theta}$ ，ΔABC 的面积 $S=\frac{4}{3}S_{\Delta BCD}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot2t\cdot3t\cdot\sin\theta=4t^2\sin\theta=\frac{16\sin\theta}{13-12\cos\theta}$ ，$\therefore y=\frac{16\sin\theta}{13-12\cos\theta},\theta\in(0,\pi)$

法一：$y=\frac{16\sin\theta}{13-12\cos\theta}\Rightarrow16\sin\theta+12y\cos\theta=13y$ (※)

$\Rightarrow\sqrt{16^2+(12y)^2}\sin(\theta+\varphi)=13y$ ，$\therefore|\sin(\theta+\varphi)|=\left|\frac{13y}{\sqrt{16^2+(12y)^2}}\right|\le1\Rightarrow169y^2\le16^2+144y^2$

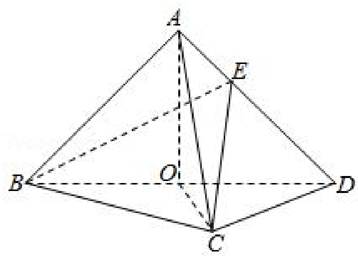
$\therefore25y^2\le16^2\Rightarrow y\le\frac{16}{5}$，　当 $y=\frac{16}{5}$时，(※)式为：$16\sin\theta+12y\cos\theta=13y\Rightarrow16\sin\theta+12\cdot\frac{16}{5}\cdot\cos\theta=13\cdot\frac{16}{5}$，$\sin(\theta+\varphi)=1$, $\therefore\theta+\varphi=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\tan\theta=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}=\frac{16}{\frac{12\cdot16}{5}}=\frac{5}{12}$，取到最大值．故函数 $y=S(\theta)$ 最大值为$\frac{16}{5}$.

法二：$\therefore y=\frac{16\sin\theta}{13-12\cos\theta}=\frac{32\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{(13sin^2\frac{\theta}{2}+13cos^2\frac{\theta}{2})-(12cos^2\frac{\theta}{2}-12sin^2\frac{\theta}{2})}=\frac{32\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{25sin^2\frac{\theta}{2}+cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{32\tan\frac{\theta}{2}}{25tan^2\frac{\theta}{2}+1}=\frac{32}{25\tan\frac{\theta}{2}+\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}}\leqslant\frac{32}{2\sqrt{25\tan\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}}}=\frac{16}{5}$，当且仅当 $25\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}$, 即 $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{5}$, 即 $\tan\theta=\frac{5}{12}$ 取最大值，故函数$y=S(\theta)$ 最大值为$\frac{16}{5}$.

8. 如图，在三棱锥$A-BCD$中，平面$ABD\perp$平面BCD，$AB=AD$，O为BD的中点.

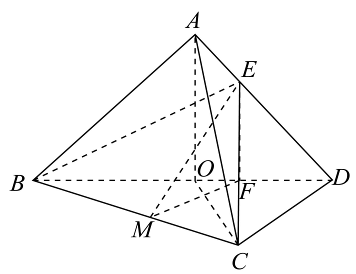
(1)证明：$OA\perp CD$；

(2)若ΔOCD是边长为 1 的等边三角形，点E在棱AD上，$DE=2EA$，且二面角$E-BC-D$的大小为$45°$，求三棱锥$A-BCD$的体积.



解：(1)证明：$\because AB=AD$，O为BD中点，$\therefore AO\perp BD$，$\because$平面$ABD\perp$平面BCD，平面$ABD\cap$平面$BCD=BD$，$AO\subset$平面ABD，$\therefore AO\perp$平面BCD，$\because CD\subset$平面BCD，$\therefore AO\perp CD$.

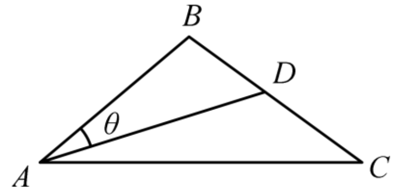
(2)作$EF\perp BD$于F, 作$FM\perp BC$于M, 连接EM, 由(1)知$AO\perp$平面BCD，$BD\subset$ 平面BCD，所以$AO\perp BD$，则$AO//EF$，所以$EF\perp$平面BCD，因为$BC\subset$ 平面BCD，所以$EF\perp BC$，又$FM\perp BC$，且$EF\cap FM=F$，$EF,FM\subset$ 平面EFM，所以$BC\perp$ 平面EFM，又因为$EM\subset$ 平面EFM，所以$BC\perp EM$，则$\angle EMF$为二面角$E-BC-D$的平面角，$\angle EMF=45^\circ$，因为$BO=OD$，$\triangle OCD$为正三角形，$BO=OD=OC=CD=1$，所以$\angle OBC=\angle OCB,\angle OCD=\angle ODC$，且$\angle OBC+\angle OCB+\angle OCD+\angle ODC=180^\circ$，所以$\angle BCD=\angle OCB+\angle OCD=90^\circ$，所以$\triangle BCD$为直角三角形，$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot CD=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times1=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 因为$DE=2EA$，所以$\frac{ED}{AD}=\frac{FD}{OD}=\frac{EF}{AO}=\frac{2}{3}$，所以$OF=\frac{1}{3}OD=\frac{1}{3}$，则$\frac{MF}{CD}=\frac{BF}{BD}=\frac{2}{3}$，所以$MF=\frac{2}{3}$, 则在$Rt\triangle EFM$中有$EF=FM=\frac{2}{3}$, 所以$AO=1$, $\because AO\perp$平面BCD, 所以$V=\frac{1}{3}AO\cdot S_{\Delta BCD}=\frac{1}{3}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.



9. 在$\triangle ABC$中，内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，且若$a^2+c^2+ac=b^2$. D为BC的中点，$AD=\sqrt{3}$，记$\angle BAD=\theta$.

(1)若$\theta=\frac{\pi}{6}$，求AB的值;

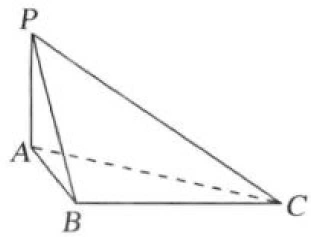
(2)求$a+2c$的取值范围.



10. 如图，三棱锥$P-ABC$中，$PA\perp$平面ABC，$PA=1$，$AB=1$，$AC=2$，$\angle BAC=60°$.

(1)求三棱锥$P-ABC$的体积;

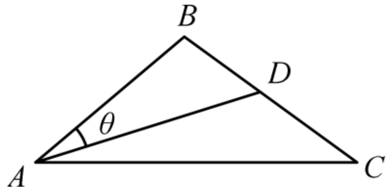
(2)在线段PC上是否存在点M，使得$AC\perp BM$，若存在点M，求出$\frac{PM}{MC}$的值;若不存在，请说明理由.



9. 在$\triangle ABC$中，内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，且若$a^2+c^2+ac=b^2$. D为BC的中点，$AD=\sqrt{3}$，记$\angle BAD=\theta$.

(1)若$\theta=\frac{\pi}{6}$，求AB的值;

(2)求$a+2c$的取值范围.



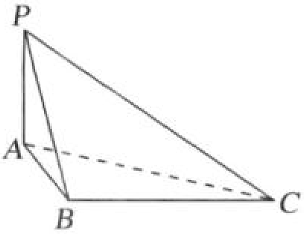
解：(1) $\because a^2+c^2+ac=b^2$，即$a^2+c^2-b^2=-ac$，由余弦定理可得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\frac{1}{2}$，所以$B=\frac{2\pi}{3}$，又$\theta=\frac{\pi}{6}$，则$\angle ADB=\frac{\pi}{6}$，在$\triangle ABD$中，$AD=\sqrt{3}$，由正弦定理可得$\frac{AD}{\sin B}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$，所以$AB=\frac{AD\cdot\sin\angle ADB}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=1$；

(2)在$\triangle ABD$中，由$B=\frac{2\pi}{3}$，可得$\theta\in(0,\frac{\pi}{3})$，由正弦定理可得$\frac{BD}{\sin\theta}=\frac{AB}{\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)}=\frac{AD}{\sin\frac{2\pi}{3}}=2$，则$a=4\sin\theta, c=2\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)$，$\therefore a+2c=4\sin\theta+4\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)=2\sin\theta+2\sqrt{3}\cos\theta=4\sin(\theta+\frac{\pi}{3})$，由$\theta\in(0,\frac{\pi}{3})$，可知$\theta+\frac{\pi}{3}\in(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$，则$\sin(\theta+\frac{\pi}{3})\in(\frac{\sqrt{3}}{2},1]$,所以$a+2c\in(2\sqrt{3},4]$.

10. 如图，三棱锥$P-ABC$中，$PA\perp$平面ABC，$PA=1$，$AB=1$，$AC=2$，$\angle BAC=60°$.

(1)求三棱锥$P-ABC$的体积;

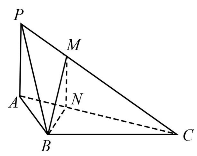
(2)在线段PC上是否存在点M，使得$AC\perp BM$，若存在点M，求出$\frac{PM}{MC}$的值;若不存在，请说明理由.



解：(1)由题知$AB=1$，$AC=2$，$\angle BAC=60°$，可得$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

由$PA\perp$平面ABC，可知PA是三棱锥$P-ABC$的高．又$PA=1$，所以三棱锥$P-ABC$的体积$V=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}\cdot PA=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

(2)如图所示，在平面ABC内，过点B作$BN\perp AC$，垂足为N.

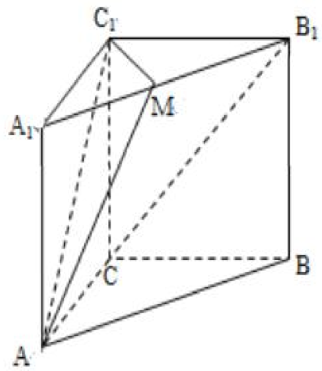


在平面PAC内，过点N作$MN\,//\,PA$交PC于点M，连接BM. 由$PA\perp$平面ABC，$AC\subset$平面ABC，知$PA\perp AC$，所以$MN\perp AC$. 由于$BN\cap MN=N$，$BN,MN\subset$平面MBN，故$AC\perp$平面MBN．又$BM\subset$平面MBN，所以$AC\perp BM$．在$Rt\triangle BAN$中，$AN=AB\cdot\cos\angle BAC=\frac{1}{2}$，从而$NC=AC-AN=\frac{3}{2}$．由$MN\,//\,PA$，得$\frac{PM}{MC}=\frac{AN}{NC}=\frac{1}{3}$.

故存在满足条件的点M，且$\frac{PM}{MC}=\frac{1}{3}$.

11.$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$a\sin\frac{A+C}{2}=b\sin A$.
(1)求B;
(2)若$\triangle ABC$为锐角三角形，且$c=1$，求$\triangle ABC$面积的取值范围.

12. 如图，直三棱柱$A_1B_1C_1-ABC$中，$AC\perp BC$，$AC=BC=1$，$CC_1=2$，点M是A_1B_1的中点.
(1)求证：$B_1C//$平面AC_1M；
(2)求三棱锥A_1-AMC_1的体积.



11.$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$a\sin\frac{A+C}{2}=b\sin A$.

(1)求B;

(2)若$\triangle ABC$为锐角三角形，且$c=1$，求$\triangle ABC$面积的取值范围.

解：(1)由题设及正弦定理得$sinAsin\frac{A+C}{2}=sinBsinA$，因为$sinA\neq 0$，所以$sin\frac{A+C}{2}=sinB$，

由$A+B+C=180°$，可得$sin\frac{A+C}{2}=cos\frac{B}{2}$，故$cos\frac{B}{2}=2sin\frac{B}{2}cos\frac{B}{2}$，因为$cos\frac{B}{2}\neq 0$，故$sin\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$，

因此$B=60°$；

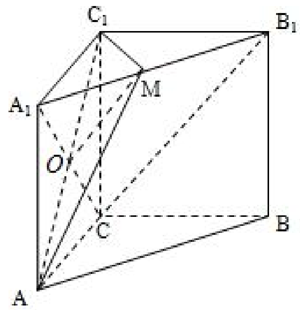
(2)由题设及(1)知$\triangle ABC$的面积$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}a$，由正弦定理得$a=\frac{csinA}{sinC}=\frac{sin(120°-C)}{sinC}=\frac{\sqrt{3}}{2tanC}+\frac{1}{2}$，由于$\triangle ABC$为锐角三角形，故 $0°<A<90°$，$0°<C<90°$，由(1)知$A+C=120°$，所以 $30°<C<90°$，故$\frac{1}{2}<a<2$，从而$\frac{\sqrt{3}}{8}<S_{\Delta ABC}<\frac{\sqrt{3}}{2}$,

因此，$\triangle ABC$面积的取值范围是$(\frac{\sqrt{3}}{8},\frac{\sqrt{3}}{2})$.

12. 如图，直三棱柱$A_1B_1C_1-ABC$中，$AC\perp BC$，$AC=BC=1$，$CC_1=2$，点M是A_1B_1的中点.

(1)求证：$B_1C//$平面AC_1M；

(2)求三棱锥A_1-AMC_1的体积.



(1)证明：在直三棱柱$A_1B_1C_1-ABC$中，侧面ACC_1A_1为矩形，

连接A_1C，交AC_1 于O，则O为A_1C 的中点，连接MO，

又M为A_1B_1的中点，$\therefore OM//B_1C$，$\because OM\subset$平面AC_1M，$B_1C\not\subset$平面AC_1M，$\therefore B_1C//$平面AC_1M；

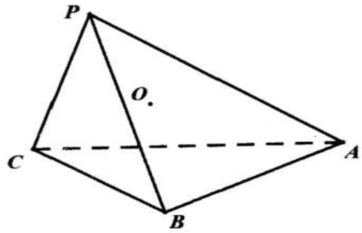
(2)解：$\because AC\perp BC$，$AC=BC=1$，M为A_1B_1的中点，

$\therefore S_{\triangle A_1MC_1}=\frac{1}{2}S_{\triangle A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{4}$,

又$CC_1=2$，$\therefore V_{A_1-AMC_1}=V_{A-A_1MC_1}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times 2=\frac{1}{6}$.

13. 已知$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$\frac{b+c}{a}=\cos C+\sqrt{3}\sin C$.
(1)求A的大小;
(2)若$\triangle ABC$为锐角三角形，求$\frac{a+c}{b}$的取值范围.

14. 一个四面体木块如图所示，点O在平面PAC内，且为ΔPAC的重心.
(1)过点O将木块锯开，使截面平行于直线AB与PC，在木块表面应该怎样划线，并说明理由；
(2)在棱BC上是否存在点D，使得直线$OD//$平面PAB？若存在，求出$\frac{BD}{DC}$的值；若不存在，说明理由.



13. 已知$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$\frac{b+c}{a}=\cos C+\sqrt{3}\sin C$.

(1)求A的大小;

(2)若$\triangle ABC$为锐角三角形，求$\frac{a+c}{b}$的取值范围.

解：(1) $\because \frac{b+c}{a}=\cos C+\sqrt{3}\sin C$，$\therefore \sin B+\sin C=\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C$，

$\because \sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，$\therefore \cos A\sin C+\sin C=\sqrt{3}\sin A\sin C$，

$\therefore \sin C(1+\cos A)=\sqrt{3}\sin A\sin C$，$\because \sin C\neq 0$，可得$\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$，…

$\therefore \sin(A-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$，又$\because A\in(0,\pi)$，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$.

(2) $\frac{a+c}{b}=\frac{\sin A+\sin C}{\sin B}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin(B+\frac{\pi}{3})}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1+\cos B}{\sin B}+\frac{1}{2}$

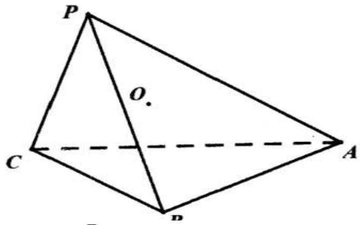
$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1+2\cos^2\frac{B}{2}-1}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\tan\frac{B}{2}}+\frac{1}{2}$.

$\because\triangle ABC$为锐角三角形，$\therefore \begin{cases}0<B<\frac{\pi}{2},\\0<\frac{2\pi}{3}-B<\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow B\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$，$\therefore \frac{B}{2}\in(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4})$.

$\therefore \tan\frac{B}{2}\in(2-\sqrt{3},1)$，$\therefore \frac{1}{\tan\frac{B}{2}}\in(1,2+\sqrt{3})$，$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\tan\frac{B}{2}}+\frac{1}{2}\in(\frac{\sqrt{3}+1}{2},2+\sqrt{3})$.

$\therefore \frac{a+c}{b}$的取值范围是$(\frac{\sqrt{3}+1}{2},2+\sqrt{3})$.

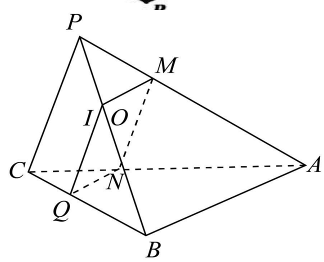
14. 一个四面体木块如图所示，点O在平面PAC内，且为ΔPAC的重心.



(1)过点O将木块锯开，使截面平行于直线AB与PC，在木块表面应该怎样划线，并说明理由；

(2)在棱BC上是否存在点D，使得直线$OD//$平面PAB？若存在，求出$\frac{BD}{DC}$的值；若不存在，说明理由.

解：(1)如图，在平面PAC内过点O作直线$MN//PC$交PA于M，交AC于N，



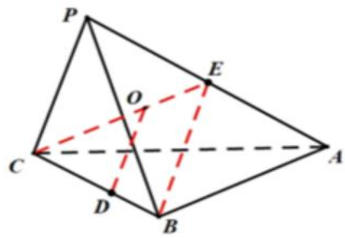
在平面PAB内过点M作直线$MI//AB$交PB于点I，在平面ABC内过点N作$NQ//AB$交BC于Q，

连接IQ，则MN、NQ、QI，IM为截面与木块各表面的交线，

证明：$\because MI//AB$，$NQ//AB$，$\therefore MI//NQ$，$\therefore M$、N、Q、I四点共面，

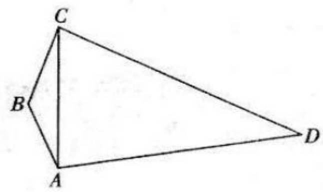
$\because AB\not\subset$平面$MNQI$，$NQ\subset$平面$MNQI$，$\therefore AB//$平面$MNQI$，同理可证$PC//$平面$MNQI$，

(2)如图，连接CO交PA于点E，连接BE，若BC上存在点D满足$OD//$平面PAB，由于$OD//$*平面*PAB，*平面*$BCE\cap$*平面*$PAB=BE$，$OD\subset$平面BCE，

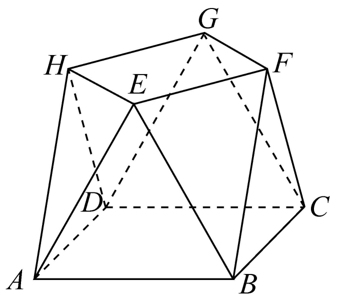


故$OD//BE$，故$\frac{CO}{OE}=\frac{CD}{DB}$，由于$O$为$\triangle PAC$的重心，所以$\frac{CO}{OE}=2$，从而$\frac{CD}{DB}=2$，所以在棱$BC$上存在点$D$，使得直线$OD//$平面$PAB$，且$\frac{BD}{DC}=\frac{1}{2}$.

15. 如图，在平面四边形$ABCD$中，$\angle BCD=\frac{\pi}{2}$，$AB=1$，$\angle ABC=\frac{3\pi}{4}$.
(1)当$BC=\sqrt{2}$，$CD=\sqrt{7}$时，求$\triangle ACD$的面积;
(2)当$\angle ADC=\frac{\pi}{6}$，$AD=2$时，求$\cos\angle ACD$.



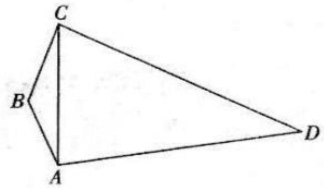
16. 小明同学参加综合实践活动，设计了一个封闭的包装盒.包装盒如图所示：底面$ABCD$是边长为8(单位：cm)的正方形，$\triangle EAB$，$\triangle FBC$，$\triangle GCD$，$\triangle HDA$均为正三角形，且它们所在的平面都与平面$ABCD$垂直.
(1)证明：$EF//$平面$ABCD$;
(2)求该包装盒的容积(不计包装盒材料的厚度).



15. 如图，在平面四边形$ABCD$中，$\angle BCD=\frac{\pi}{2}$，$AB=1$，$\angle ABC=\frac{3\pi}{4}$.

(1)当$BC=\sqrt{2}$，$CD=\sqrt{7}$时，求$\triangle ACD$的面积;

(2)当$\angle ADC=\frac{\pi}{6}$，$AD=2$ 时，求 $\cos\angle ACD$.



解：(1)当$BC=\sqrt{2}$时，在$\triangle ABC$中由余弦定理可得 $\cos\angle ABC=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}$，

即$\frac{3-AC^2}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，得$AC=\sqrt{5}$，余弦定理得 $\cos\angle ACB=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$. 因为$\angle BCD=\frac{\pi}{2}$，所以 $\sin\angle ACD=\cos\angle ACB=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，因为$CD=\sqrt{7}$，$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AC\cdot CD\sin\angle ACD=\frac{1}{2}\sqrt{35}\sin\angle ACD=\frac{3}{4}\sqrt{14}$.

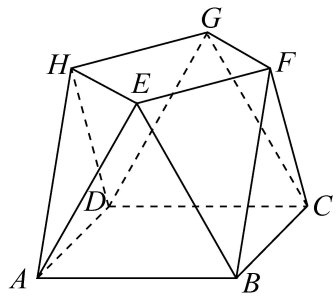
(2)在$\triangle ABC$中由正弦定理可得$\frac{AB}{\sin\angle ACB}=\frac{AC}{\sin\frac{3\pi}{4}}$，即$\frac{AB}{\cos\angle ACD}=\sqrt{2}AC$，得$AC=\frac{\sqrt{2}}{2\cos\angle ACD}$，

在$\triangle ACD$中由正弦定理可得$\frac{AD}{\sin\angle ACD}=\frac{AC}{\sin\frac{\pi}{6}}$，即$AC=\frac{1}{\sin\angle ACD}$. 所以$\frac{\sqrt{2}}{2\cos\angle ACD}=\frac{1}{\sin\angle ACD}$，化简得 $\sin\angle ACD=\sqrt{2}\cos\angle ACD$. 结合$\sin^2\angle ACD+\cos^2\angle ACD=1$，$0<cos\quad\angle ACD<\frac{\pi}{2}$，所以 $\cos\angle ACD=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

16. 小明同学参加综合实践活动，设计了一个封闭的包装盒.包装盒如图所示：底面$ABCD$是边长为 8(单位：cm)的正方形，$\triangle EAB$，$\triangle FBC$，$\triangle GCD$，$\triangle HDA$均为正三角形，且它们所在的平面都与平面$ABCD$垂直.

(1)证明：$EF//$平面$ABCD$;

(2)求该包装盒的容积(不计包装盒材料的厚度).



(1)过点E作$EE'\perp AB$于点E'，过点F作$FF'\perp BC$于点F'，连接$E'F'$. ∵底面$ABCD$是边长为 8 的正方形，$\triangle EAB$、$\triangle FBC$均为正三角形，且它们所在的平面都与平面$ABCD$垂直，∴$EE'=FF'$，

又平面$EAB\cap$平面$ABCD=AB$，平面$FBC\cap$平面$ABCD=BC$，

∴$EE'\perp$平面$ABCD$，$FF'\perp$平面$ABCD$，∴$EE'//FF'$，

则四边形$EE'F'F$为平行四边形，∴$EF//E'F'$，

∵$E'F'\subset$平面$ABCD$，$EF\not\subset$平面$ABCD$，∴$EF//$平面$ABCD$.

(2)同理，过点G，H分别作$GG'\perp CD$，$HH'\perp DA$，交CD，DA于点G'，H'，连接$F'G'$，$G'H'$，$H'E'$，AC，由(1)及题意可知，G'，H'分别为CD，DA的中点，$EFGH-E'F'G'H'$为长方体，故该包装盒可看成由一个长方体和四个相等的四棱锥组合而成. 由底面$ABCD$是边长为 8 的正方形可得：$E'F'=H'E'=\frac{1}{2}AC=4\sqrt{2}$，由线面垂直可知四棱锥的高为$\frac{1}{4}AC$，∴所求该包装盒的容积为$V=V_{EFGH-E'F'G'H'}+4V_{A-EE'H'H}=E'F'\times E'H'\times EE'+4\times\frac{1}{3}\times S_{EE'H'H}\times\frac{1}{4}AC=4\sqrt{2}\times4\sqrt{2}\times4\sqrt{3}+4\times\frac{1}{3}\times4\sqrt{2}\times4\sqrt{3}\times\frac{1}{4}\times8\sqrt{2}=\frac{640\sqrt{3}}{3}$.