

8. 已知锐角 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $a\cos B - b\cos 2A = c$,
且 $\triangle ABC$ 外接圆半径为2, 则 $\frac{a^2}{b+c}$ 的取值范围是()

A. $[2\sqrt{3}, 4)$ B. $[2\sqrt{3}, 6)$ C. $[\sqrt{3}, 2)$ D. $[\sqrt{3}, 4)$

二、多选题

9. 将向量 $\vec{a}$ 替换为复数 z , 以下是向量的性质类比到复数中, 其中在复数中结论仍然成立的是()

A. 由 $|\vec{a}| = |\vec{a}|$, 类比为: $|-z| = |z|$
B. 由 $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$, 类比为: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
C. 由 $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, 类比为: $z^2 = |z|^2$
D. 由 $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, 类比为: $z_1 \cdot z_2 \leq |z_1| \cdot |z_2|$

10. 已知 m, n 是两条不同的直线, α, β, γ 是三个不同的平面. 下列说法中正确的是()

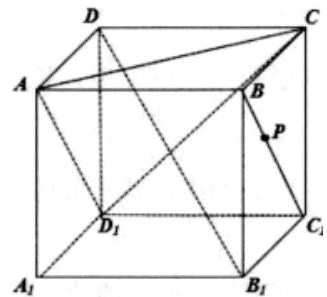
A. 若 $m//\alpha, m \subset \beta, \alpha \cap \beta = n$, 则 $m//n$
B. 若 $m//n, m//\alpha$, 则 $n//\alpha$
C. 若 $\alpha \cap \beta = n, \alpha \perp \beta, \beta \perp \gamma$, 则 $n \perp \gamma$
D. 若 $m \perp \alpha, m \perp \beta, \alpha//\gamma$, 则 $\beta//\gamma$

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 下列命题中正确的是()

A. 若 $\sin^2 A + \sin^2 B < \sin^2 C$, 则 $\triangle ABC$ 一定是钝角三角形
B. 若 $a\cos B = b\cos A + c$, 则 $\triangle ABC$ 一定是直角三角形
C. 若 $\cos^2 \frac{B}{2} = \frac{a+c}{2c}$, 则 $\triangle ABC$ 一定是锐角三角形
D. 若 $\tan A + \tan B + \tan C > 0$, 则 $\triangle ABC$ 一定是锐角三角形

12. 如图, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 在线段 BC_1 上运动, 有下列判断, 其中正确的是()

A. 平面 $PB_1D \perp$ 平面 ACD_1
B. $A_1P//$ 平面 ACD_1
C. 异面直线 A_1P 与 AD_1 所成角的取值范围是 $(0, \frac{\pi}{3}]$
D. 三棱锥 $D_1 - APC$ 的体积不变



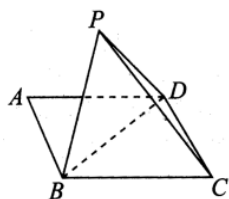
三、填空题

13. 已知复数 z 满足 $|z + 3 + 4i| = 2$, 则 $|z|$ 的最大值是_____.

14. 若 $\sqrt{3}\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 则 $\cos (\frac{\pi}{3} - 2\alpha) =$ _____.

15. 在平行四边形 $ABCD$ 中, 若 $\angle BAD = 120^\circ$, $AB = 1$, $AD = 2$, 点 P 是线段 BC 上不含端点的一个动点, 则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{DP}$ 的取值范围是_____.

16. 如图所示, 在边长为1的菱形 $ABCD$ 中, $\angle BCD = 60^\circ$, 现将 $\triangle ABD$ 沿对角线 BD 折起, 得到三棱锥 $P - DBC$. 当 $\triangle PBC$ 为等边三角形时, 异面直线 PB 与 CD 所成的角的余弦值为_____; 当三棱锥 $P - DBC$ 的体积最大时其外接球的表面积为_____.



四、解答题

17. 已知复数 z 满足 $(1 + i)z = 1 - 3i$ (i 是虚数单位).

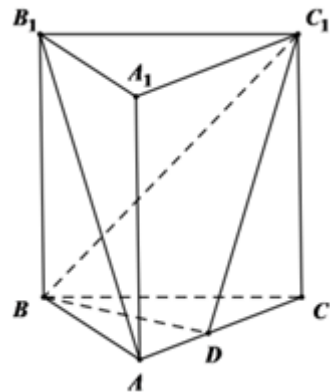
(1) 若复数 $(1 + ai)z$ 是纯虚数, 求实数 a 的值;

(2) 若复数 z 的共轭复数为 $\bar{z}$, 求复数 $\frac{\bar{z}}{z+1}$ 的模.

18. 如图, 在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, D 为棱 AC 的中点.

(1) 证明: $AB_1 \parallel$ 平面 BC_1D ;

(2) 证明: $BD \perp DC_1$.



19. 已知 $\tan \alpha = \frac{1}{7}$, $\cos(\alpha + \beta) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, α, β 都是锐角,

(1) 求 $\sin 2\alpha - 2\cos 2\beta$ 的值;

(2) 求 $\alpha + 2\beta$ 的值.

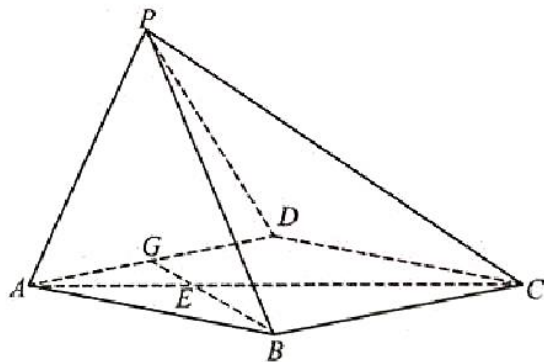
20. 已知在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $b\cos\left(A - \frac{\pi}{6}\right) - 2a\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2} = 0$.

(1)求角 A 的值；

(2)已知 $a = 4$.

(i)求 $\triangle ABC$ 面积的最大值； (ii)求 $3b + 4c$ 的最大值.

21.如图，在四棱锥 $P - ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 a 的菱形， $\angle DAB = 60^\circ$ ， $\triangle PAD$ 为正三角形，平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ， G 为边 AD 的中点.



(1)求证： $BG \perp$ 平面 PAD ；

(2)若 BG 与 AC 交于点 E ，设点 F 是棱 AP 上一动点，试确定点 F 的位置，使得 $EF \parallel$ 平面 PBC ，并证明你的结论；

(3)求二面角 $P - AC - B$ 的正切值.

22. 已知函数 $g(x) = ax^2 - 2x + 1 + b$ ，函数 $g(x)$ 有两个零点分别是 -1 和 3 .

(1)若存在 $x_0 \in [1, 3]$ ，使不等式 $g(x_0) - mx_0 \geq 0$ 成立，求实数 m 的取值范围；

(2)记 $f(x) = g(x) - 3kx + 2k$ ，若方程 $f(|2^x - 1|) = 0$ 有三个不同的实数解，求实数 k 的取值范围.

答案和解析

1. 【答案】C

解: $z = 2 - i$, $\bar{z} + i = 2 + 2i$, $|\bar{z} + i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

2. 【答案】B

解: $\because \sin \alpha = \frac{1}{3}$, $\therefore \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \times \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$. 故选: B.

3. 【答案】D

【解析】

【分析】

本题考查了基本初等函数的单调性和函数零点存在性定理等知识, 属于基础题.

由 $f(x) = \ln x + x - 5$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数且连续, 再通过计算 $f(1)$ 、 $f(2)$ 、 $f(3)$ 的值, 发现 $f(3) \cdot f(4) < 0$, 即可得到零点所在区间.

【解答】

解: 函数 $f(x)$ 在 R 上单调递增, $f(1) = -4 < 0$, $f(2) = \ln 2 - 3 < 0$, $f(3) = \ln 3 - 2 < 0$, $f(4) = \ln 4 - 1 > 0$, 根据零点存在性定理可知 $f(x)$ 的零点所在区间为 $(3, 4)$.

4. 【答案】C

【解析】

【分析】

本题主要考查函数的实际应用, 掌握指数函数的公式是解本题的关键, 属于基础题.

设DNA数量没有扩增前数量为 a , 由题意可得, $a(1 + p\%)^5 = 10a$, 即 $(1 + p\%)^5 = 10$, 再两边取对数, 即可求解.

【解答】

解: 设DNA数量没有扩增前数量为 a ,

由题意可得: $a(1 + p\%)^5 = 10a$, 即 $(1 + p\%)^5 = 10$,

所以 $5\lg(1 + p\%) = 1$, 即 $1 + p\% = 10^{0.2}$, 即 $p\% = 10^{0.2} - 1 \approx 1.585 - 1 = 0.585$,

故 $p \approx 58.5$.

故选 C .

5. 【答案】 B

【解析】

【分析】

本题考查平面向量的模，平面向量的数量积，属于基础题.

求得 $|\vec{b}|$ ，利用 $|2\vec{a} - \vec{b}|^2 = 4\vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$ ，结合数量积的运算公式，代入数据即可求解.

【解答】

解：由 $\vec{b} = (\sqrt{3}, -1)$ ，得 $|\vec{b}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ ，

$$|2\vec{a} - \vec{b}|^2 = 4\vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$$

$$= 4|\vec{a}|^2 - 4|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ + |\vec{b}|^2 = 4 - 4 + 4 = 4,$$

所以 $|2\vec{a} - \vec{b}| = 2$.

故答案选： B .

6. 【答案】 B

【解析】

【分析】

本题考查解三角形，数形结合思想，考查学生的计算能力，属于中档题.

通过所给条件依次求出 MC ， NC ，再由余弦定理可求得 MN .

【解答】

解：由题得，在 $\triangle ACM$ 中， $MA = AC \tan \angle MCA = 60 \times \frac{3}{4} = 45$ ，则 $MC = \sqrt{MA^2 + AC^2} = 75$ ，

$$\text{在 } \triangle CBN \text{ 中, } NC = \frac{CB}{\cos \angle NCB} = \frac{70\sqrt{3}}{\frac{14}{15}} = 75\sqrt{3},$$

则在 $\triangle MCN$ 中，由余弦定理可得 $MN^2 = MC^2 + NC^2 - 2MC \cdot NC \cos \angle MCN = 75^2 + (75\sqrt{3})^2 - 2 \times$

$$75 \times 75\sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 39375,$$

则 $MN = 75\sqrt{7}$.

故选： B .

7.【答案】B

【解析】

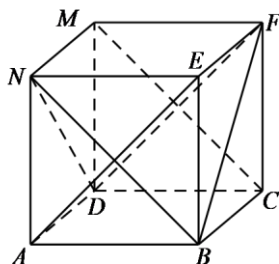
【分析】

本题考查空间中直线与直线的位置关系、异面直线的概念，属于基础题.

还原为正方体，根据空间直线的位置关系结合正方体的性质即得.

【解答】

解：把平面展开图折起，得到如图所示的正方体，



则 BF 与 DN 是异面直线，故①错误；

CM 与 BN 平行，故②错误；

由题可知 $DF \perp CM$, $CM \parallel BN$ ，所以 DF 与 BN 垂直，故③正确；

AE 与 DN 是异面直线，故④正确；

故选 B.

8.【答案】C

【解析】

【分析】

本题主要考查余弦定理、正弦定理、三角形面积公式、利用基本不等式求最值，属于中档题.

【解答】

解：因为 $a\cos B - b\cos 2A = c$ ，由正弦定理知：

$$\sin A \cos B - \sin B \cos 2A = \sin C = \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B,$$

因为 $\sin B \neq 0$ ，故 $-\cos 2A = \cos A = -\cos^2 A + 1$ ，

解得 $\cos A = \frac{1}{2}$ 或 $\cos A = -1$ (舍去)，又因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形， $A = \frac{\pi}{3}$.

因为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为2，

由正弦定理知： $\frac{a}{\sin A} = 2 \times 2$ ，即 $a = 4\sin A = 2\sqrt{3}$ ，

$$b+c = \frac{a}{\sin A} [\sin B + \sin(\frac{2\pi}{3} - B)] = 4[\sin B + \sin(\frac{2\pi}{3} - B)] = 4(\sin B + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B + \frac{1}{2} \sin B) = 4\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin B + \frac{1}{2} \cos B) = 4\sqrt{3} \sin(B + \frac{\pi}{6}),$$

$\because \triangle ABC$ 是锐角三角形,

$$\therefore \begin{cases} 0 < B < \frac{\pi}{2} \\ 0 < C = \frac{2\pi}{3} - B < \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ 解得 } \frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{2}, \text{ 得 } B + \frac{\pi}{6} \in (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}),$$

$$\therefore \sin(B + \frac{\pi}{6}) \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, 1], \text{ 可得 } b+c \in (6, 4\sqrt{3}], \text{ 又 } a^2 = 12,$$

故 $\frac{a^2}{b+c}$ 的取值范围是 $[\sqrt{3}, 2)$.

故选 C.

9. 【答案】AB

【解析】

【分析】

本题考查复数的运算以及复数的模，属于基础题.

【解答】

解：对于A，令 $z = a + bi (a, b \in R)$ ，则 $-z = -a - bi$ ， $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ， $|-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$ ，故A正确；

对于B，令 $z_1 = a + bi$ ， $z_2 = c + di$ ， $(a, b, c, d \in R)$ ，

$$|z_1 + z_2|^2 = (a + c)^2 + (b + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ac + bd),$$

$$(|z_1| + |z_2|)^2 = (\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2})^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2},$$

$$\text{又 } (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 = (ad - bc)^2 \geq 0,$$

故 $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ，故B正确；

对于C，取 $z = 1 + 2i$ ， $|z|^2 = 5$ ，而 $z^2 = (1 + 2i)^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i$ ，故C错误；

对于D，取 $z_1 = 1 + i$ ， $z_2 = i$ ，，则 $z_1 \cdot z_2 = -1 + i$ ， $|z_1||z_2| = \sqrt{2}$ 为实数，故D错误.

10. 【答案】AD

【解析】

【分析】

本题考查空间中的线面，线线及面面位置关系，属于基础题.

根据空间中的线面、面面关系逐一判断即可.

【解答】

解：由线面平行的性质可得 A 正确；

若 $m//n$, $m//\alpha$, 则 $n//\alpha$ 或 $n \subset \alpha$, 故 B 错误；

由 $\alpha \cap \beta = n$, $\alpha \perp \beta$, $\beta \perp \gamma$ 推不出 $n \perp \gamma$, 也可能有 $n//\gamma$, 故 C 错误；

若 $m \perp \alpha$, $m \perp \beta$, 则 $\alpha//\beta$, 又 $\alpha//\gamma$, 则 $\beta//\gamma$, 故 D 正确；

故选：AD.

11. 【答案】ABD

【解析】

【分析】

本题主要考查利用余弦定理判断三角形的形状，正弦定理及变形，两角和的正切公式，属于中档题.

对于 A，利用正弦定理化为边的关系，再利用余弦定理判断即可；对于 B，利用余弦定理统一成边的形式，化简即可判断；对于 C，利用正弦定理和三角函数恒等变换公式化简变形；对于 D，利用两角和的正切公式化简判断.

【解答】

解：对于 A，因为 $\sin^2 A + \sin^2 B < \sin^2 C$ ，所以由正弦定理得 $a^2 + b^2 < c^2$ ，

所以 $a^2 + b^2 - c^2 < 0$ ，所以由余弦定理得 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} < 0$ ，

因为 $C \in (0, \pi)$ ，所以 C 为钝角，所以 $\triangle ABC$ 一定是钝角三角形，所以 A 正确；

对于 B，因为 $a \cos B = b \cos A + c$ ，所以由余弦定理得 $a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + c$ ，

所以 $a^2 + c^2 - b^2 = b^2 + c^2 - a^2 + 2c^2$ ，所以 $a^2 = b^2 + c^2$ ，

所以 $\triangle ABC$ 一定是直角三角形，所以 B 正确；

对于 C，因为 $\cos^2 \frac{B}{2} = \frac{a+c}{2c}$ ，所以 $\frac{1+\cos B}{2} = \frac{a+c}{2c} = \frac{a}{2c} + \frac{1}{2}$ ，所以 $\cos B = \frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C}$ ，

所以 $\sin A = \sin C \cos B = \sin(B+C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C$ ，

所以 $\sin B \cos C = 0$ ，因为 $\sin B \neq 0$ ，所以 $\cos C = 0$ ，

因为 $C \in (0, \pi)$ ，所以 $C = \frac{\pi}{2}$ ，

所以 $\triangle ABC$ 一定是直角三角形, 所以 C 错误;

对于 D , 因为 $\tan A = \tan [\pi - (B + C)] = -\tan (B + C) = -\frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C}$,

所以 $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$,

因为 $\tan A + \tan B + \tan C > 0$, 所以 $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C > 0$,

因为 $\triangle ABC$ 中不可能有两个钝角, 所以 $\tan A > 0, \tan B > 0, \tan C > 0$,

所以 A, B, C 都为锐角, 所以 $\triangle ABC$ 一定是锐角三角形, 所以 D 正确.

故选: ABD .

12. 【答案】 ABD

【解析】

【分析】

本题考查空间中线面的位置关系, 棱锥体积、异面直线夹角, 属较难题.

【解答】

解: 对于 A : 连接 DB , 因为正方体中, $BB_1 \perp$ 平面 $ABCD$,

$AC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $BB_1 \perp AC$, 又因为 $DB \perp AC$,

DB, BB_1 为平面 DBB_1D_1 内的两条相交直线, 所以 $AC \perp$ 平面 DBB_1D_1 ,

因为 $DB_1 \subset$ 平面 DBB_1D_1 , 所以 $DB_1 \perp AC$, 同理可得 $DB_1 \perp AD_1$,

因为 AD_1, AC 为平面 ACD_1 内两条相交直线, 可得 $DB_1 \perp$ 平面 ACD_1 , $DB_1 \subset$ 平面 PB_1D ,

从而平面 $PB_1D \perp$ 平面 ACD_1 ,

故 A 正确;

对于 B : 连接 $A_1B, A_1C_1, A_1C_1 // AC, A_1C_1 \not\subset$ 平面 $ACD_1, AC \subset$ 平面 ACD_1 ,

所以 $A_1C_1 //$ 平面 ACD_1 ,

同理 $BC_1 //$ 平面 ACD_1 , 又 A_1C_1, BC_1 为平面 BA_1C_1 内两条相交直线,

所以平面 $BA_1C_1 //$ 平面 ACD_1 ,

因为 $A_1P \subset$ 平面 BA_1C_1 , 所以 $A_1P //$ 平面 ACD_1 , 故 B 正确;

对于 C : 因为 $AD_1 // BC_1$, 所以 A_1P 与 AD_1 所成角即为 A_1P 与 BC_1 所成的角, $A_1B = BC_1 = A_1C_1$, 则

$\triangle BA_1C_1$ 为等边三角形, 当 P 与线段 BC_1 的两端点重合时, A_1P 与 AD_1 所成角取最小值 $\frac{\pi}{3}$; 当 P 与线段

BC_1 的中点重合时, A_1P 与 AD_1 所成角取最大值 $\frac{\pi}{2}$, 故 A_1P 与 AD_1 所成角的范围是 $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$, 故 C 不正确

;

对于 D : 由选项 B 得 $BC_1 \parallel$ 平面 AD_1C , 故 BC_1 上任意一点到平面 AD_1C 的距离均相等,

所以以 P 为顶点, 平面 AD_1C 为底面, 则三棱锥 $P-AD_1C$ 的体积不变, 又 $V_{D_1-APC} = V_{P-AD_1C}$,

所以三棱锥 D_1-APC 的体积不变, 故 D 正确.

13. 【答案】7

【解析】

【分析】

本题主要考查绝对值三角不等式的应用, 复数求模, 属于基础题.

根据 $|z + 3 + 4i| = 2 \geq |z| - |3 + 4i|$, 求得 $|z|$ 的最大值.

【解答】

解: $\because |z + 3 + 4i| = 2 \geq |z| - |3 + 4i|$,

$\therefore |z| \leq 2 + |3 + 4i| = 2 + 5 = 7$,

故 $|z|$ 的最大值是 7.

故答案为 7.

14. 【答案】 $-\frac{5}{9}$

【解析】

【分析】

本题考查了三角函数的中的化简求值问题, 考查了两角和与差的三角函数公式和二倍角公式, 属于中档题.

先逆用两角和的正弦得到 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{3}$, 令 $\alpha = \theta - \frac{\pi}{3}$, 则 $\cos(\frac{\pi}{3} - 2\alpha)$ 的值即为 $-\cos 2\theta$ 的值,

利用二倍角的余弦值可求此值.

【解答】

解: 由 $\sqrt{3}\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 可以得到 $2(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos \alpha + \frac{1}{2}\sin \alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,

所以 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{3}$, 设 $\theta = \alpha + \frac{\pi}{3}$, 则 $\alpha = \theta - \frac{\pi}{3}$

则 $\frac{\pi}{3} - 2\alpha = \frac{\pi}{3} - 2(\theta - \frac{\pi}{3}) = \pi - 2\theta$,

所以 $\cos(\frac{\pi}{3} - 2\alpha) = \cos(\pi - 2\theta) = -\cos 2\theta = 2\sin^2 \theta - 1 = \frac{4}{9} - 1 = -\frac{5}{9}$.

故答案为 $-\frac{5}{9}$.

15.【答案】 $[-\frac{1}{4}, 2)$

【解析】

【分析】

本题考查平面向量数量积的坐标运算，以及利用二次函数性质求最值问题，属于较难题.

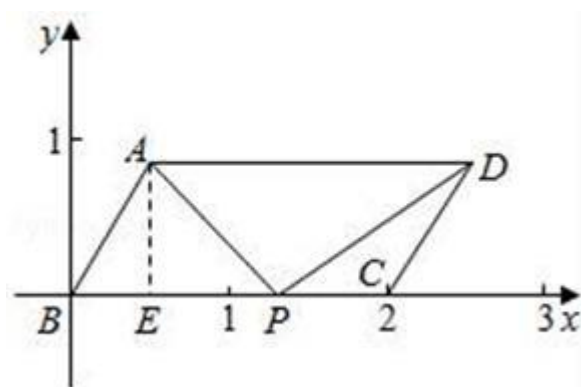
以 B 为坐标原点，以 BC 所在的直线为 x 轴，建立直角坐标系，作 $AE \perp BC$ ，垂足为 E ，求出 $A(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$,

$D(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ，设点 $P(x, 0)(0 < x < 2)$ ，根据向量的坐标运算以及向量的数量积的运算得到

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{DP} = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}$ ，即可求出答案.

【解答】

解：以 B 为坐标原点，以 BC 所在的直线为 x 轴，建立直角坐标系，作 $AE \perp BC$ ，垂足为 E ，



$\because \angle BAD = 120^\circ, AB = 1, AD = 2,$

$\therefore \angle ABC = 60^\circ, \therefore AE = \frac{\sqrt{3}}{2}, BE = \frac{1}{2},$

$\therefore A(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), D(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}),$

$\because$ 点 P 是线段 BC 上的一个动点，设点 $P(x, 0)(0 < x < 2)$,

$\therefore \overrightarrow{AP} = (x - \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}), \overrightarrow{DP} = (x - \frac{5}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}),$

$\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{DP} = (x - \frac{1}{2})(x - \frac{5}{2}) + \frac{3}{4} = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4},$

$\therefore$ 当 $x = \frac{3}{2}$ 时， $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{DP}$ 有最小值，最小值为 $-\frac{1}{4}$,

当点 P 接近 B 点时， $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{DP}$ 有最大值，最大值小于2，

$\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{DP}$ 的取值范围为 $[-\frac{1}{4}, 2)$,

故答案为 $[-\frac{1}{4}, 2)$.

16. 【答案】 0

$$\frac{5\pi}{3}$$

【解析】

【分析】

本题考查异面直线所成角，考查多面体外接球表面积的法，考查数形结合的解题思想方法，考查思维能力与计算能力.

利用线面垂直性质及判定，得 $CD \perp PB$ ；由题意画出图形，找出 $\triangle BCD$ 外接圆的圆心及三棱锥 $P-BCD$ 的外接球心为 O ，通过求解三角形求出三棱锥 $P-BCD$ 的外接球的半径，则答案可求.

【解答】

解：当 $\triangle PBC$ 为等边三角形时，

$PB = PC = BC = BD = CD = 1$ ，即该三棱锥为正四面体，

取 CD 的中点 Q ，连接 PQ ， BQ ，易证得 $CD \perp$ 平面 PBQ ，

故 $CD \perp PB$ ，即异面直线 PB 与 CD 所成的角为 90° ，其余弦值为 0.

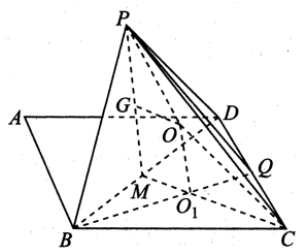
易知当三棱锥 $P-DBC$ 的体积最大时，平面 $PBD \perp$ 平面 BCD .

取 $\triangle BDC$ 的外心为 O_1 ，设 O 为球心，连接 OO_1 ，

则 $OO_1 \perp$ 平面 BDC ，取 BD 的中点 M ，连接 PM ， O_1M ，

过 O 作 $OG \perp PM$ 于点 G ，易知四边形 OO_1MG 为矩形，

连接 OP ， OC ，



设 $OP = R$ ， $OO_1 = MG = h$.

连接 MC ，则 O_1 ， M ， C 三点共线，

易知 $MP = MC = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $OG = MO_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$, $CO_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

在 $Rt \triangle PGO$ 和 $Rt \triangle OO_1C$ 中, $GP^2 + GO^2 = OP^2$,

$O_1C^2 + O_1O^2 = OC^2$, 即 $(\frac{\sqrt{3}}{2} - h)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{6})^2 = R^2$,

$(\frac{\sqrt{3}}{3})^2 + h^2 = R^2$, 所以 $h = \frac{\sqrt{3}}{6}$, $R^2 = \frac{5}{12}$,

所以 $S_{球O} = 4\pi R^2 = \frac{5}{3}\pi$.

故答案为 $0; \frac{5\pi}{3}$.

17. 【答案】 解: (1) 由 $(1+i)z = 1-3i$, 得 $z = \frac{1-3i}{1+i} = \frac{(1-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2-4i}{2} = -1-2i$,

$(1+ai)z = (1+ai)(-1-2i) = 2a-1-(2+a)i$,

$\because$ 复数 $(1+ai)z$ 是纯虚数, $\therefore \begin{cases} 2a-1=0 \\ -(2+a) \neq 0 \end{cases}$, 解得 $a = \frac{1}{2}$.

$\therefore$ 实数 a 的值为 $\frac{1}{2}$;

(2) 由 $z = -1-2i$, 得 $\bar{z} = -1+2i$.

则 $\frac{\bar{z}}{z+1} = \frac{-1+2i}{-1-2i+1} = \frac{2i(-1+2i)}{-2i \cdot 2i} = \frac{-4-2i}{4} = -1 - \frac{1}{2}i$,

$\therefore |\frac{\bar{z}}{z+1}| = \sqrt{(-1)^2 + (-\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

$\therefore$ 复数 $\frac{\bar{z}}{z+1}$ 的模为: $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

【解析】 本题考查了复数代数形式的乘除运算, 考查了复数的基本概念, 考查了复数模的求法. 属于中等问题.

(1) 由 $(1+i)z = 1-3i$, 得 $z = \frac{1-3i}{1+i}$, 然后由复数代数形式的乘除运算化简复数 z , 把复数 z 代入

$(1+ai)z$ 化简, 再由已知条件列出方程组, 求解可得答案;

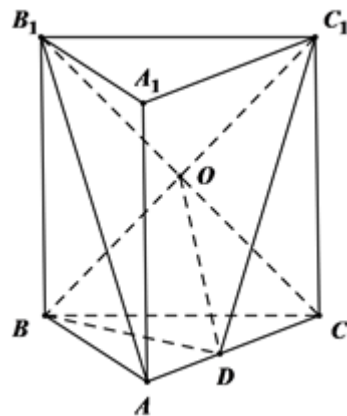
(2) 由复数 z 求出 $\bar{z}$, 然后代入复数 $\frac{\bar{z}}{z+1}$ 化简, 再由复数求模公式计算得答案.

18. 【答案】 证明: (1) 连接 B_1C , 交 BC_1 于点 O , 连接 OD ,

因为 BCC_1B_1 为矩形, 则 O 为 B_1C 的中点;

因为 D 为 AC 的中点,

所以 $OD \parallel AB_1$,



又因为 $OD \subset$ 平面 BC_1D , $AB_1 \not\subset$ 平面 BC_1D ,

所以 $AB_1 \parallel$ 平面 BC_1D ;

(2)在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中,

因为 $AA_1 \perp$ 平面 ABC , $BD \subset$ 平面 ABC ,

所以 $AA_1 \perp BD$.

因为 $\triangle ABC$ 为等边三角形, D 为 AC 的中点,

所以 $AC \perp BD$.

又因为 $AA_1 \cap AC = A$, $AA_1, AC \subset$ 平面 AA_1C_1C ,

所以 $BD \perp$ 平面 AA_1C_1C ,

因为 $DC_1 \subset$ 平面 AA_1C_1C ,

所以 $BD \perp DC_1$.

【解析】 本题考查线面平行和线面垂直的判定和性质, 考查推理能力, 属于中档题.

(1)连接 B_1C , 交 BC_1 于点 O , 连接 OD , 由三角形的定理和线面平行的判定定理, 即可得证; (2)由线面垂直的判定定理推得 $BD \perp$ 平面 AA_1C_1C , 再由线面垂直的性质, 即可得证.

19. **【答案】** 解: (1)
$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{7}, \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$$

由 α 是锐角得 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}, \cos \alpha = \frac{7\sqrt{2}}{10}$,

所以 $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{10} \times \frac{7\sqrt{2}}{10} = \frac{7}{25}$.

由 α, β 都是锐角, 所以 $\alpha + \beta \in (0, \pi)$,

由 $\cos(\alpha + \beta) = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{5}}{5}$,

所以 $\cos \beta = \cos[(\alpha + \beta) - \alpha] = \cos(\alpha + \beta)\cos \alpha + \sin(\alpha + \beta)\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{7\sqrt{2}}{10} + \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{10} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$,

则 $\cos 2\beta = 2\cos^2 \beta - 1 = \frac{4}{5}$,

则 $\sin 2\alpha - 2\cos 2\beta = \frac{7}{25} - 2 \times \frac{4}{5} = -\frac{33}{25}$.

(2)由 $\cos(\alpha + \beta) = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 得 $\alpha + \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$,

又 $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $\alpha + 2\beta \in (0, \pi)$, $\cos \beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \sin \beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$,

所以 $\cos(\alpha + 2\beta) = \cos[(\alpha + \beta) + \beta] = \cos(\alpha + \beta)\cos \beta - \sin(\alpha + \beta)\sin \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} - \frac{\sqrt{5}}{5} \times$

$$\frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{故 } \alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4}.$$

【解析】本题考查了同角三角函数的基本关系、二倍角公式、两角和与差的三角函数公式，属于较难题.

(1)先得出 $\sin\alpha, \cos\alpha$ ，从而求出 $\sin 2\alpha$ ，由 $\cos(\alpha + \beta)$ 得 $\sin(\alpha + \beta)$ ，从而根据 $\cos\beta = \cos[(\alpha + \beta) - \alpha]$ 得到 $\cos\beta$ 的值，根据二倍角公式得 $\cos 2\beta$ 的值，即可求解；

(2)根据 $\cos(\alpha + 2\beta) = \cos[(\alpha + \beta) + \beta]$ 结合 $\alpha + 2\beta \in (0, \pi)$ 求解即可.

20. 【答案】解：(1)依题意， $b\cos\left(A - \frac{\pi}{6}\right) - a\sin B = 0$,

$$\text{则 } \sin B \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos A + \frac{1}{2} \sin A \right) - \sin A \sin B = 0,$$

$$\text{因为 } \sin B \neq 0, \text{ 故 } \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A - \frac{1}{2} \sin A = 0,$$

$$\text{解得 } \tan A = \sqrt{3};$$

$$\text{因为 } A \in (0, \pi), \text{ 故 } A = \frac{\pi}{3};$$

$$(2)(i) \text{ 依题意, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4} bc,$$

由余弦定理， $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ ，则 $16 = b^2 + c^2 - bc \geq bc$ ，当且仅当 $b = c = 4$ 时等号成立，

$$\text{故 } S_{\triangle ABC} \leq 4\sqrt{3}, \text{ 即 } \triangle ABC \text{ 面积的最大值为 } 4\sqrt{3};$$

$$(ii) \text{ 由正弦定理, } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8}{\sqrt{3}},$$

$$\text{所以 } b = \frac{8}{\sqrt{3}} \sin B, c = \frac{8}{\sqrt{3}} \sin C,$$

$$\text{所以 } 3b + 4c = \frac{8}{\sqrt{3}} (3\sin B + 4\sin C) = \frac{8}{\sqrt{3}} \left[3\sin B + 4\sin \left(\frac{2\pi}{3} - B \right) \right]$$

$$= \frac{8}{\sqrt{3}} \left[3\sin B + 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos B + \frac{1}{2} \sin B \right) \right] = \frac{8}{\sqrt{3}} (5\sin B + 2\sqrt{3} \cos B) = \frac{8\sqrt{37}}{\sqrt{3}} \sin(B + \varphi),$$

$$\text{其中 } \tan \varphi = \frac{2\sqrt{3}}{5} \text{ 且 } \varphi \text{ 为锐角, } B \in \left(0, \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$\text{则当 } \sin(B + \varphi) = 1 \text{ 时, } 3b + 4c \text{ 有最大值 } \frac{8\sqrt{111}}{3}.$$

【解析】 本题主要考查了两角和与差的三角函数公式，余弦定理，正弦定理，三角形面积公式，利用基本不等式求最值的应用.

(1)由正弦定理可得 $\sin B \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos A + \frac{1}{2} \sin A \right) - \sin A \sin B = 0$ ，即 $\tan A = \sqrt{3}$ ，从而可求角 A 的值；

(2)(i)利用余弦定理结合基本不等式可求出 $bc \leq 16$ ，然后利用三角形的面积公式可求得其最大值；

(ii)利用正弦定理表示 b, c ，然后代入 $3b + 4c$ 中利用三角函数恒等变换公式化简变形可求出结果.

21. 【答案】解：(1)连接 BD ，

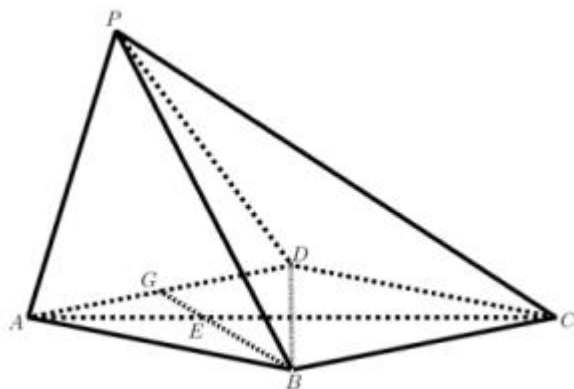
因为底面 $ABCD$ 为菱形，所以 $AD = AB$ ，

又 $\angle DAB = 60^\circ$ ，所以 $\triangle ABD$ 为正三角形，

又 $AG = DG$ ，所以 $BG \perp AD$ ，

又面 $PAD \perp$ 面 $ABCD$ ，面 $PAD \cap$ 面 $ABCD = AD$ ， $BG \subset$ 面 $ABCD$ ，

所以， $BG \perp$ 面 PAD .



(2)当点 F 是棱 AP 上靠近点 A 的三等分点时， $EF \parallel$ 面 PBC .

理由如下：

连接 EF ， BD ，

因为底面 $ABCD$ 为菱形，所以 AC 与 BD 互相平分，

又 $AG = DG$ ，

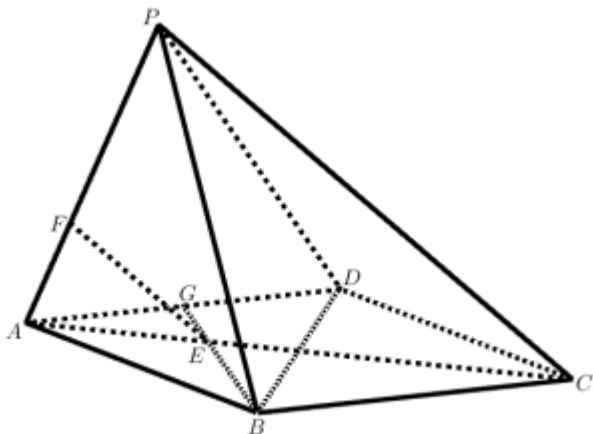
所以 E 是 $\triangle ABD$ 重心，即 $GE:EB = 1:2$ ，

又 $AD \parallel BC$ ，则 $AE:EC = GE:EB = 1:2$ ，

所以 $AE = \frac{1}{3}AC$ ，又 $AF = \frac{1}{3}AP$ ，所以， $EF \parallel PC$ ，

又 $PC \subset$ 面 PBC ， $EF \not\subset$ 面 PBC ，

所以, $EF \parallel \text{面} PBC$,



(3) 连接 PG ，过点 G 作 $GM \perp AC$ 于 M ，连接 PM 。

因为 $\triangle PAD$ 为正三角形,

又 $AG = DG$, 所以 $PG \perp AD$,

又面 $PAD \perp$ 面 $ABCD$, 面 $PAD \cap$ 面 $ABCD = AD$, $PG \subset$ 面 PAD ,

所以 $PG \perp$ 面 $ABCD$ ，因为 $AC \subset$ 面 $ABCD$ ，所以 $PG \perp AC$ ，

又 $GM \perp AC$, $PG \cap MG = G$, $PG, MG \subset \text{面}PGM$,

所以 $AC \perp$ 面 PGM ，因为 $PM \subset$ 面 PGM ，所以 $AC \perp PM$ ，

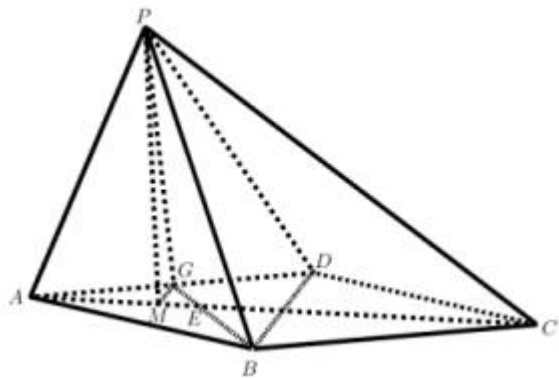
所以, $\angle PMG$ 是二面角 $P-AC-B$ 的平面角的补角.

又 $Rt \triangle AGM$ 中, $GM = AG \cdot \sin \angle DAC = \frac{1}{2}a \times \frac{1}{2} = \frac{a}{4}$, 正 $\triangle PAD$ 中, $PG = \frac{\sqrt{3}}{2}a$,

所以, $\tan \angle PMG = \frac{PG}{GM} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{1}{4}a} = 2\sqrt{3}$,

因为二面角 $P-AC-B$ 为钝角,

所以, 二面角 $P-AC-B$ 的正切值为 $-2\sqrt{3}$.



【解析】 本题考查线面垂直的判定，线面平行的判定，二面角的解法，属于较难题.

(1)连接 BD ，证得 $BG \perp AD$ ，再由面面垂直的性质可证得 $BG \perp$ 平面 PAD ；

(2)连接 EF, BD ，证得 $EF \parallel PC$ ，再由线面平行的判定定理可得结果；

(3)连接 PG ，过点 G 作 $GM \perp AC$ 于 M ，连接 PM ，得到 $\angle PMG$ 是二面角 $P-AC-B$ 的平面角的补角，

$Rt \triangle AGM$ 中计算 $\tan \angle PMG$ 可得二面角 $P-AC-B$ 的正切值.

22. 【答案】解：(1) $\because g(-1) = 0, g(3) = 0$,

$\therefore x_1 = -1, x_2 = 3$ 是方程 $ax^2 - 2x + 1 + b = 0$ 的两个根.

$$\therefore \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2}{a} = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{1+b}{a} = -3 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases}$$

$$\therefore g(x) = x^2 - 2x - 3.$$

$\because$ 存在 $x_0 \in [1, 3]$ ，使不等式 $g(x_0) \geq mx_0$ 成立，等价于 $x - \frac{3}{x} - 2 \geq m$ 在 $x \in [1, 3]$ 上有解，

$$\text{而记 } u(x) = x - \frac{3}{x} - 2,$$

$\because u(x)$ 在 $x \in [1, 3]$ 时单调递增，

$$\therefore u(x)_{\max} = u(3) = 0.$$

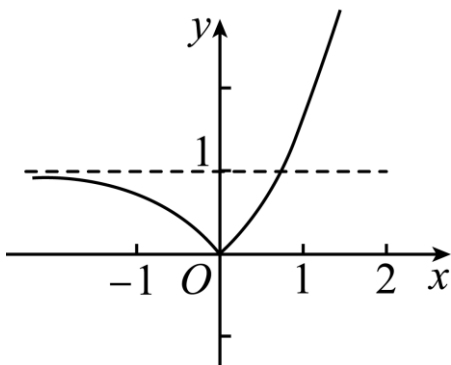
$\therefore m$ 的取值范围为 $(-\infty, 0]$;

$$(2) \because f(x) = g(x) - 3kx + 2k,$$

$$\therefore f(x) = x^2 - (2 + 3k)x + 2k - 3,$$

$$\text{原方程可化为 } |2^x - 1|^2 - (3k + 2)|2^x - 1| + (2k - 3) = 0.$$

函数 $y = |2^x - 1|$ 的图象如图，



令 $t = |2^x - 1|$ ，当 $0 < t < 1$ 时，有2个 x 使得 $t = |2^x - 1|$ ，

当 $t = 0$ 或 $t \geq 1$ 时，仅有1个 x 使得 $t = |2^x - 1|$ ，

要使得 $f(|2^x - 1|) = 0$ 有3个实数解，

即 $0 < t < 1$ 有两个 x , $t = 0$ 或 $t \geq 1$ 时有 1 个 x ,

所以关于 t 的方程有两解, 所以 $0 < t_1 < 1$, $t_2 \geq 1$, 或者 $t_1 = 0$, $0 < t_2 < 1$,

$\therefore t \in [0, +\infty)$, 则 $t^2 - (3k+2)t + 2k-3 = 0$ 有两个不同的实数解 t_1, t_2 ,

记 $h(t) = t^2 - (3k+2)t + 2k-3$,

则 $\begin{cases} h(0) = 2k-3 > 0 \\ h(1) = -k-4 < 0 \end{cases}$ ①, 解得 $k > \frac{3}{2}$.

或 $\begin{cases} h(0) = 2k-3 > 0 \\ h(1) = -k-4 = 0 \\ 0 < \frac{3k+2}{2} < 1 \end{cases}$ ②, 不等式组②无实数解.

或 $\begin{cases} h(0) = 2k-3 = 0 \\ h(1) = -k-4 > 0 \\ 0 < \frac{3k+2}{2} < 1 \end{cases}$ ③, 不等式组③无实数解,

$\therefore$ 实数 k 的取值范围为 $(\frac{3}{2}, +\infty)$.

【解析】 本题考查了二次函数、指数函数及其性质和函数的零点与方程根的关系.

(1) 先由函数 $g(x)$ 有两个零点分别是 -1 和 3 , 利用根与系数的关系得出 a, b , 原题等价于

$x - \frac{3}{x} - 2 \geq m$ 在 $x \in [1, 3]$ 上有解, 记 $u(x) = x - \frac{3}{x} - 2$, 研究 $u(x)$ 的最大值即可;

(2) 研究函数 $y = |2^x - 1|$ 的图象得要使得 $f(|2^x - 1|) = 0$ 有 3 个实数解, 即 $0 < t < 1$ 有两个 x , $t = 0$

或 $t \geq 1$ 时有 1 个 x , 所以关于 t 的方程有两解, 所以 $0 < t_1 < 1$, $t_2 \geq 1$, 或者 $t_1 = 0$, $0 < t_2 < 1$,

由根的分布可得 不等式组, 求解即可.