

2022-2023 学年第二学期高一数学周练 9 2023. 5. 13

班级 _____ 姓名 _____ 学号 _____ 评价 _____

一、单选题（本大题共 8 小题，共 40.0 分。在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 已知 l, m 表示两条不同的直线， α 表示平面，则下列说法正确的是 ()

- A. 若 $l \perp \alpha, m \subset \alpha$, 则 $l \perp m$ B. 若 $l \perp m, m \subset \alpha$, 则 $l \perp \alpha$
C. 若 $l // m, m \subset \alpha$, 则 $l // \alpha$ D. 若 $l // \alpha, m \subset \alpha$, 则 $l // m$

2. 若向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 不共线，且 $\vec{a} + m\vec{b}$ 与 $\vec{b} - 3\vec{a}$ 共线，则实数 m 的值为 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. 3 C. -3 D. $-\frac{1}{3}$

3. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，若 $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B}$, $c^2 = a^2 + b^2 - ab$ ，则 $\triangle ABC$ 是 ()

- A. 钝角三角形 B. 等边三角形 C. 直角三角形 D. 等腰直角三角形

4. 复数 $2 + i$ 与复数 $\frac{1}{3+i}$ 在复平面内对应的点分别是 A, B ，若 O 为坐标原点，则 $\angle AOB$ 为 ()

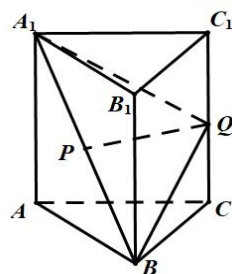
- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

5. 已知 $\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \sqrt{3}$ ，则 $\tan \theta =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $-\sqrt{3}$

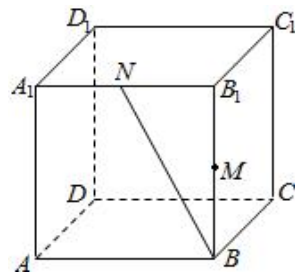
6. 如图，在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $CA = CB$ ， P 为 A_1B 的中点， Q 为棱 CC_1 的中点，则下列结论不正确的是 ()

- A. $PQ \perp A_1B$ B. $AC // \text{平面 } A_1BQ$
C. $PQ \perp CC_1$ D. $PQ // \text{平面 } ABC$



7. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， M, N 分别是 BB_1, A_1B_1 的中点。点 P 在该正方体的表面上运动，则总能使 MP 与 BN 垂直的点 P 所构成的轨迹的周长等于 ()

- A. 4 B. $2 + \sqrt{2}$ C. $3 + \sqrt{5}$ D. $2 + \sqrt{5}$



8. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对应的边分别为 a, b, c ，若 $ac = 4$ ， $\sin B + 2\sin C \cos A = 0$ ，则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 ()

- A. 1 B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 4

二、多选题（本大题共 4 小题，共 20.0 分。在每小题有多项符合题目要求）

9. 已知 $\triangle ABC$ 中，其内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c 下列命题正确的有 ()

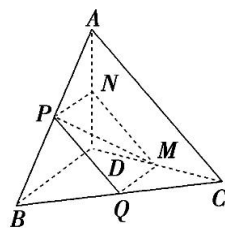
- A. 若 $A > B$ ，则 $\sin A > \sin B$ ； B. 若 $A = \frac{\pi}{6}$ ， $a = 5$ ，则 $\triangle ABC$ 外接圆半径为 10
C. 若 $a = 2b\cos C$ ，则 $\triangle ABC$ 为等腰三角形； D. 若 $b = 1, c = 2, A = \frac{2\pi}{3}$ ，则 $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

10. 已知 $\vec{a} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ ， $\vec{b} = (\cos\beta, \sin\beta)$ ，其中 $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$ ，则以下结论正确的是 ()

- A. 若 $\vec{a} // \vec{b}$ ，则 $\alpha = \beta$ ； B. 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，则 $|\alpha - \beta| = \frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}$
C. 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}$ ，则 $|\vec{a} + \vec{b}| = 1$ ； D. 若 $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}|$ ，则 $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \frac{3}{2}$

11. 如图，在四面体 $ABCD$ 中，点 P, Q, M, N 分别是棱 AB, BC, CD, AD 的中点，截面 $PQMN$ 是正方形，则下列结论正确的为 ()

- A. $AC //$ 截面 $PQMN$ B. 异面直线 PM 与 BD 所成的角为 60°
C. $AC \perp BD$ D. $BD \perp$ 平面 ACD



12. 已知 $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ ， $\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$ ，其中 α, β 为锐角，则以下命题正确的是 ()

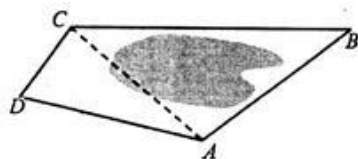
- A. $\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$ B. $\cos(\alpha - \beta) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
C. $\cos\alpha\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{10}$ D. $\tan\alpha\tan\beta = \frac{1}{3}$

三、填空题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

13. 给出下列四个命题：

- ① 三点确定一个平面； ② 一条直线和一个点确定一个平面；
③ 若四点不共面，则每三点一定不共线； ④ 三条两两相交的直线确定一个平面。
其中假命题的个数是_____。

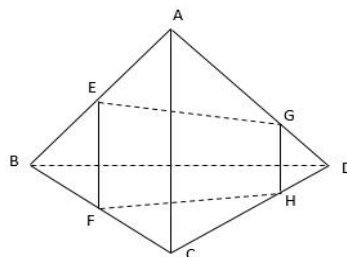
14. 如图为了测量 A, C 两点间的距离，选取同一平面上 B, D 两点，测出四边形 $ABCD$ 的各边的长度(单位: km): $AB = 5, BC = 8, CD = 3, DA = 5$ ，如图所示，且 A, B, C, D 四点共圆，则 AC 的长为_____ km 。



15. 已知平面向量 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ， $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2, \vec{\alpha} \perp (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})$ ，则 $|2\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$ 的值是_____。

16. 已知 E, F, G, H 分别为四面体 $ABCD$ 的棱 AB, BC, DA, CD 上的点，且 $AE = EB, BF = FC, CH = 2HD, AG = 2GD$ ，则下列说法中所有正确的序号是_____。

- ① $AC //$ 平面 EFH ； ② $EF // GH$ ；
③ 直线 EG, FH, BD 相交于同一点；
④ $BD //$ 平面 EFG 。



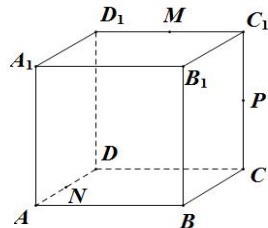
四、解答题（本大题共 6 小题，共 72.0 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17. (本小题 12.0 分)

已知在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M, N, P 分别为 C_1D_1, AD, CC_1 的中点，棱长为 1.

(1) 求证: $MP \parallel$ 平面 ABB_1A_1 ;

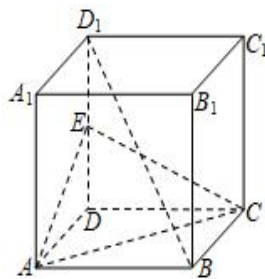
(2) 过 M, N, P 三点作正方体的截面，画出截面(保留作图痕迹)，并计算截面的周长.



18. (本小题 12.0 分) 如图，在直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 为菱形， E 为 DD_1 中点.

(1) 求证: $BD_1 \parallel$ 平面 ACE ;

(2) 求证: $BD_1 \perp AC$.



19. (本小题 12.0 分)

在 ① $(a + b + c)(a + b - c) = 3ab$, ② $\frac{\tan A + \tan B}{\tan A \tan B - 1} = \sqrt{3}$, ③ $\frac{\sin C}{2\sin B - \sin A} = \frac{\cos C}{\cos A}$ 这三个条件中任选一个，补充在下面的横线上，并加以解答.

在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，且满足_____.

(1) 求 $\tan C$ 的值;

(2) 若 D 为边 BC 上一点，且 $AD = 6, BD = 4, AB = 8$ ，求 AC .

20. (本小题 12.0 分) 设 $f(x) = \sin x \cos x - \cos^2(x + \frac{\pi}{4})$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

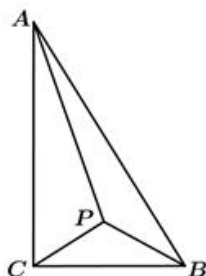
(2) 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $f(\frac{A}{2}) = 0$, $a = 1$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

21. (本小题 12.0 分)

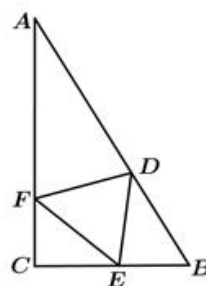
如图: 某公园改建一个三角形池塘, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 2$ 百米, $BC = 1$ 百米, 现准备养一批观赏鱼供游客观赏.

(1) 若在 $\triangle ABC$ 内部取一点 P , 建造 APC 连廊供游客观赏, 如图①, 使得点 P 是等腰三角形 PBC 的顶点, 且 $\angle CPB = \frac{2\pi}{3}$, 求连廊 $AP + PC + PB$ 的长(单位为百米);

(2) 若分别在 AB, BC, CA 上取点 D, E, F , 并连建造连廊, 使得 $\triangle DEF$ 变成池中池, 放养更名贵的鱼类供游客观赏, 如图②, 使得 $\triangle DEF$ 为正三角形, 求 $\triangle DEF$ 的面积最小值.



图①



图②

22. (本小题 12.0 分) 已知 $\vec{a} = (\sin \omega x, \cos \omega x)$, $\vec{b} = (\cos \omega x, \sqrt{3} \cos \omega x)$, $f(x) = \vec{a} \cdot (\vec{b} - \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{a})$ ($\omega > 0$). 函数 $y = f(x)$ 的最小正周期为 π .

(I) 求函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 内的单调递增区间;

(II) 若关于 x 的不等式 $f(x - \frac{\pi}{6}) > \sqrt{2} m \sin(x + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 内恒成立, 求实数 m 的取值范围.