江苏省仪征中学 2022-2023 学年度高一下学期期初数学试卷（4）

一、单选题（本大题共 8 小题，共 40.0 分。在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 设$U=R$，集合$A=\left\{x\left|\frac{1-x}{x+3}<0\right.\right\}$，$B=\{x|\log_2 x<1\}$，则$(\complement_U A)\cap B=$（　）

A. $(-\infty,1]$　　B. $[1,2)$　　C. $(0,1]$　　D. $(0,2)$

2. 已知角$\frac{17\pi}{6}$的终边经过点$\left(2\sqrt{3},x\right)$，则$x=$(　)

A. -2　　B. 2　　C. 4　　D. -4

3. 设函数$y=e^{x-1}$与$y=-x+1$的图像的交点为(x_0,y_0)，则x_0所在的区间是　(　)

A. $(0,\frac{1}{3})$　　B. $(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$　　C. $(\frac{1}{2},\frac{2}{3})$　　D. $(\frac{2}{3},1)$

4. 设$a=\sin\frac{3}{2}+\frac{1}{2}$，$b=\tan\frac{4}{3}$，$c=\log_9 27$，则有　(　)

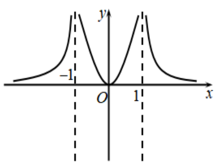
A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$　　C. $c<b<a$　　D. $c<a<b$

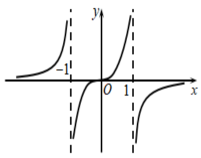
5. 下列函数中既是奇函数，又是定义域上的增函数的是（　）

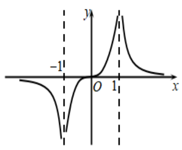
A. $\cos(\sin 2x)$　　B. $\lg\frac{1-x}{1+x}$

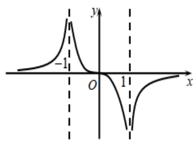
C. $f(x)=\log_4(4^x+1)-\frac{1}{2}x$　　D. $f(x)=\frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$

6. 函数$f(x)=\ln|x+1|-\ln|x-1|$的图象大致是（　）

A. 

B. 

C. 

D. 

7. 已知某品牌手机电池充满电量为1200毫安，每经过 *1* 小时，电量消耗20％，若电池电量不超过200毫安时充电最佳，那么该手机至少可以待机小时．(待机小时取整数，参考数据：$\lg 2\approx 0.30,\lg 3\approx 0.48$)　(　)

A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 10

8. 已知函数$f(x)=\begin{cases}e^{x-1},x\geq 1,\\e^{1-x},x<1,\end{cases}$若不等式$f(ax)<f(x-1)$在$[2,3]$上有解，则$a$的范围是(　)

A. $\left(0,\frac{3}{4}\right)$　　B. $\left(-\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$　　C. $\left(0,\frac{2}{3}\right)$　　D. $\left(-\frac{1}{4},\frac{2}{3}\right)$

二、多选题（本大题共 4 小题，共 20.0 分。在每小题有多项符合题目要求）

9. 已知a，b，c都为实数，则下列命题正确的是 ( )

A. 若$a<b$，则$a^{\frac{2}{3}}<b^{\frac{2}{3}}$　　B. 若$a>b$，则$\frac{a}{c^2+1}>\frac{b}{c^2+1}$

C. 若$a>b>0$，且$c>0$，则$\frac{b+c}{a+c}>\frac{b}{a}$　　D. 若$a>b>0$，则$2^a-\log_3 b>2^b-\log_3 a$

10. 已知函数$f(x)=\sqrt{3}\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})(\omega>0)$相邻两个最高点之间距离为$\pi$，以下正确的是 ( )

A. $f(x)$的最小正周期为π　　B. $f(x-\frac{2\pi}{3})$是奇函数

C. $f(x)$的图象关于直线$x=-\frac{\pi}{6}$对称　　D. $f(x)$在$\left[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$上单调递增

11. 已知正实数x，y，z满足$3^x=4^y=6^z$，则 ( )

A. $\frac{1}{x}+\frac{2}{z}=\frac{2}{y}$　　B. $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}$　　C. $\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+y>\sqrt{6}$　　D. $z(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})>\frac{3}{2}$

12. 已知函数$f(x)$，$g(x)$的定义域均为R，且$f(x)+g(2-x)=2$，$g(x)-f(x-4)=2$，$g(x+2)$为偶函数，则 ( )

A. $f(x)$是偶函数　　B. $g(x)$是周期函数　　C. $f(2023)=2$　　D. $g(1)=2$

三、填空题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

13. 函数$y=\lg(-2kx^2-4kx+3)$的定义域为R，则实数k的取值范围是_______.

14. 若扇形的周长为4，则扇形的面积的最大值是______.

15. 函数$f(x)=\log_2 x\cdot\log_2\frac{x}{2}$，$x\in[1,2]$时，$f(x)$的值域为______.

16. 已知$f(x)=\begin{cases}x,0<x<1\\2^x,x\geq 1\end{cases}$,若存在$x_2>x_1>0$，使得$f(x_2)=2f(x_1)$，则$x_1+f(x_2)$的取值范围是__________.

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70.0 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17. 已知函数$f(x)=\sqrt{\frac{2-x}{x-1}}$的定义域为集合$A$，函数$g(x)=3^{m-2x-x^2}-1$的值域为集合$B$.

(1)求集合A，B；

(2)若$A\cup B=B$，求实数m的取值范围.

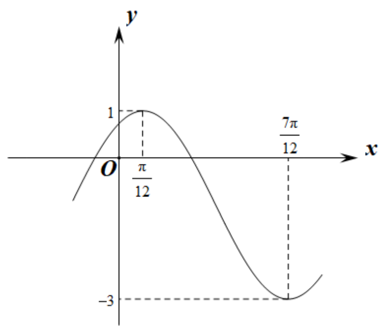
18. 已知$\frac{3\cos\alpha-2\sin\alpha}{\sin\alpha+2\cos\alpha}=-\frac{1}{4}$. (1)求$\frac{\cos(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\sin(3\pi-\alpha)\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)}$的值；

(2)求$2sin^2(\pi-\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+1$的值.

19. 已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示.

(1)求$f(x)$的解析式及对称中心坐标；

(2)先把$f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位，再向上平移1个单位，得到函数$g(x)$的图象，若当$x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\right]$时，关于$x$的方程$g(x)+2a-1=0$有实数根，求实数$a$的取值范围.



20. 已知函数$f(x)=\frac{a\cdot 2^x-1}{2^x+1}$为奇函数.

(1)求a的值；(2)证明：函数$f(x)$是R上的增函数；

(3)对于任意的$x\in[-1,1]$，不等式$f(4^x+4^{-x}-5)+f[m(2^x-2^{-x})]\le 0$恒成立，试求常数$m$的取值范围.

21. 某乡镇响应“绿水青山就是金山银山”的号召，因地制宜的将该镇打造成“生态水果特色小镇”.经调研发现：某珍惜水果树的单位产量x(单位：吨)与使用肥料成本C(单位：万元)满足如下关系：肥料的固定成本为250万元，每生产x吨需投入成本$C(x)$.当年产量不足80吨时，$C(x)=\frac{1}{3}x^2+10x$(万元)；当年产量不小于80吨时，$C(x)=51x+\frac{10000}{x}-1450$(万元)，每吨水果售价为0.05万元，该乡镇可以把水果全部售完.

(1)写出年利润$L(x)$(万元)关于年产量x(吨)的函数解析式；

(2)当年产量为多少吨时，所获利润最大？该乡镇决定将此水果所获利润的1%用来购买学习用品捐赠给希望工程，当所获年利润最大时，可购买多少万元的学习用品？

22. 已知任意的三次函数$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d+e$的图象都有对称中心$(x_0,f(x_0))$，函数$g(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+ax+a(a\in R)$.

(1)若$a=1$，求函数$g(x)$的图象的对称中心；

(2)已知x_1，$x_2(x_1<x_2)$为函数$h(x)=x^2+2x+a$的两个零点，且$g(x)$在$(-\infty,x_1)$和$(x_2,+\infty)$上单调递增，在(x_1,x_2)上单调递减，若$g(x)$在R上只有一个零点，求a的取值范围.

答案和解析

1.【答案】C 2.【答案】A

3.【答案】B 解：设函数$f(x)=e^{x-1}+x-1$，显然在R上$f(x)$是连续的单调递增函数，

则函数$y=e^{x-1}$与$y=-x+1$的图像的交点横坐标为函数$f(x)$的零点.

因为$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{\sqrt{e}}-\frac{1}{2}>0$，$f(\frac{1}{3})=\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}-\frac{1}{3}<0$，所以$\frac{1}{3}<x_0<\frac{1}{2}$，故选 B.

4.【答案】B 解：$b=\tan\frac{4}{3}>\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，$c=\log_9 27=\frac{3}{2}$，所以$b>c$；

$c=\frac{3}{2}=1+\frac{1}{2}>\sin\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=a$，所以$c>a$，所以$b>c>a$，故选 B.

5.【答案】D 解：A. $f(-x)=\cos(-\sin 2x)=\cos(\sin 2x)=f(x)$，所以函数$f(x)$为偶函数，不符合题意； B. 因为$\frac{1-x}{1+x}>0$，所以函数的定义域为$(-1,1)$，$f(-x)=\lg\frac{1+x}{1-x}=-\lg\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$，

所以函数$f(x)$是奇函数，又$f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}=\lg\left(\frac{2}{1+x}-1\right)$，由复合函数的单调性可知，$f(x)$为减函数，不符合题意；$C.f(-x)=\log_4(4^{-x}+1)+\frac{1}{2}x=\log_4(4^x+1)-\frac{1}{2}x=f(x)$，所以函数$f(x)$为偶函数，不符合题意；

D. 易知函数$f(x)$的定义域R，$f(-x)=-f(x),f(x)$为奇函数，

$f(x)=\frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}=\frac{2^{2x}-1}{2^{2x}+1}=1-\frac{2}{2^{2x}+1}$,由复合函数的单调性可知$f(x)$为增函数，符合题意，故选 D.

6.【答案】C

7.【答案】B 解：设手机待机小时数为$n(n\in N^*)$，由题意$1.2\times 0.8^n\leq 0.2$,即$\left(\frac{5}{4}\right)^n\geq 6$，

两边取常用对数可得$\lg\left(\frac{5}{4}\right)^n\geq\lg 6$，即$n\lg\left(\frac{5}{4}\right)\geq\lg 2+\lg 3$，所以$n\geq\frac{\lg 2+\lg 3}{1-3\lg 2}$，

因为$\lg 2\approx 0.30,\lg 3\approx 0.48$，所以$\frac{\lg 2+\lg 3}{1-3\lg 2}\approx 7.8$，所以$n\geq 7.8$，又$n\in N^*$，所以$n_{\min}=8$，即手机至少可以待机8小时，故选 B.

8.【答案】C 解：因为$f(1-x)=f(1+x)$，所以函数关于直线$x=1$对称；

当$x\geq 1$时，函数$f(x)$单调递增，所以，$f(ax)<f(x-1)\Leftrightarrow|ax-1|<|x-1-1|$，又因为$x\in[2,3]$，所以$x-2>0$,原问题转化为不等式$2-x<ax-1<x-2$在$[2,3]$上有解，则$a<\left(\frac{x-1}{x}\right)_{\max}$，

且$a>\left(\frac{3-x}{x}\right)_{\min}$，因为函数$y=\frac{x-1}{x}=1-\frac{1}{x}$在$[2,3]$上单调递减，

所以当$x=3$时，$\left(\frac{x-1}{x}\right)_{\max}=\frac{2}{3}$，所以$a<\frac{2}{3}$；因为函数$y=\frac{3-x}{x}=\frac{3}{x}-1$在$[2,3]$上单调递增，所以当$x=3$时，$\left(\frac{3-x}{x}\right)_{\min}=0$，所以$a>0$，综上，$a\in\left(0,\frac{2}{3}\right)$，

9.【答案】BCD　　10.【答案】ABD　　11.【答案】BC

12.【答案】ABD 解：因为$g(x+2)$为偶函数，所以有$g(x+2)=g(2-x)$，

由$f(x)+g(2-x)=2$，可得$f(-x)+g(2+x)=2$，所以$f(x)=f(-x)$，A 正确；

所以由$f(-x)+g(2+x)=2$，可得$f(x)+g(2+x)=2$，

由$g(x)-f(x-4)=2$，可得$g(x+4)-f(x)=2$，所以$g(x+4)+g(x+2)=4$，

所以$g(x+2)=g(x+6)$，所以$g(x)=g(x+4)$，B 正确；

令$x=-1$，可得$g(3)+g(1)=4$，$g(3)=g(1)$，所以$g(1)=2$，D 正确；

令$x=1$，由$g(x)-f(x-4)=2$，可得$f(-3)=0$，

由$g(x)=g(x+4)$，易得$f(x)=f(x+4)$，所以$f(2023)=f(3)=f(-3)=0$，所以 C 错误，

故选 ABD.

13.【答案】$\left(-\frac{3}{2},0\right]$　　14.【答案】1　　15.【答案】$\left[-\frac{1}{4},0\right]$

16.【答案】$\left(0,\frac{3}{2}\right)\cup[5,+\infty)$

解：当$0<x_1<x_2<1$时，$f(x_2)=x_2=2x_1,\because x_2\in(0,1),\therefore x_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，

$\therefore x_1+f(x_2)=3x_1\in\left(0,\frac{3}{2}\right)$；

当$0<x_1<1\le x_2$时，

$f(x_2)=2^{x_2}=2x_1,\because 2x_1\in(0,2)$, 而$2^{x_2}\in[2,+\infty)$，所以不存在$x_1,x_2$使得$2^{x_2}=2x_1$成立，

当$1\le x_1<x_2$时，

$f(x_2)=2^{x_2}=2\cdot 2^{x_1}=2^{x_1+1},\therefore x_2=x_1+1,\therefore x_2\ge 2$，$\therefore x_1+f(x_2)=x_2-1+2^{x_2},x_2\in[2,+\infty)$，

设函数$g(x)=x-1+2^x$,函数$g(x)$在$[2,+\infty)$单调递增，所以$g(x)$的值域为$[5,+\infty)$,

综上，$x_1+f(x_2)$的取值范围是$\left(0,\frac{3}{2}\right)\cup[5,+\infty)$.

17.【答案】解：(1)由题意，$\frac{2-x}{x-1}\ge 0$，可得$1<x\le 2$，即$A=\{x|1<x\le 2\}$，

由$m-2x-x^2=-(x+1)^2+1+m\le m+1$，

可得$-1<3^{m-2x-x^2}-1\le -1+3^{1+m}$，即$B=(-1,-1+3^{1+m}]$.

(2)由$A\cup B=B$，得$A\subseteq B$，即$-1+3^{1+m}\ge 2$，

即$3^{1+m}\ge 3$，即$1+m\ge 1$，所以$m\ge 0$.

18.【答案】(1)解：因为$\frac{3\cos\alpha-2\sin\alpha}{\sin\alpha+2\cos\alpha}=\frac{3-2\tan\alpha}{\tan\alpha+2}=-\frac{1}{4}$，所以$\tan\alpha=2$．

$$\frac{\cos(\pi+\alpha)\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)\sin(3\pi-\alpha)\sin(\frac{5\pi}{2}+\alpha)}=\frac{(-\cos\alpha)\cdot(-\sin\alpha)(-\cos\alpha)}{(-\sin\alpha)\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{1}{2}$$

(2)解：由(1)得$\tan\alpha=2$，所以$2sin^2(\pi-\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+1$

$=2sin^2\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha+1=\frac{2sin^2\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{sin^2\alpha+cos^2\alpha}+1=\frac{2tan^2\alpha+\tan\alpha}{tan^2\alpha+1}+1=3$.

19.【答案】解：(1)由题意可得：$\begin{cases}A+B=1\\-A+B=-3\end{cases}$，可得$\begin{cases}A=2\\B=-1\end{cases}$，

所以$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)-1$，因为$\frac{T}{2}=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}$，所以$T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，可得$\omega=2$，

所以$f(x)=2\sin(2x+\varphi)-1$，由$2\times\frac{\pi}{12}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in Z)$可得$\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in Z)$，

因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以$k=0$，$\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以$f(x)=2sin\,(2x+\frac{\pi}{3})-1$.

令$2x+\frac{\pi}{3}=k\pi(k\in Z)$可得$x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6}(k\in Z)$，所以对称中心为$(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6},-1)(k\in Z)$.

(2)由题意可得：$g(x)=2sin\,[2(x+\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{3}]-1+1=2sin\,(2x+\frac{2\pi}{3})$，

当$x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}]$时，$2x+\frac{2\pi}{3}\in[\frac{\pi}{6},\pi]$，$sin\,(2x+\frac{2\pi}{3})\in[0,1]$，$g(x)\in[0,2]$

若关于x的方程$g(x)+2a-1=0$有实数根，则$1-2a=g(x)$有实根，

所以$0\leq1-2a\leq2$，可得：$-\frac{1}{2}\leq a\leq\frac{1}{2}$. 所以实数$a$的取值范围为$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

20.【答案】解：(1)易得函数的定义域为R，所以由$f(0)=0$，可得$a=1$.

或由$f(x)+f(-x)=\frac{a\cdot2^{-x}-1}{2^{-x}+1}+\frac{a\cdot2^{x}-1}{2^{x}+1}=\frac{(a-1)(2^x-1)}{2^x+1}=0$，$\Rightarrow a=1$.

(2)由(1)知$f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$，设x_1，$x_2\in R$，且$x_1>x_2$，

$f(x_1)-f(x_2)=\frac{2^{x_1}-1}{2^{x_1}+1}-\frac{2^{x_2}-1}{2^{x_2}+1}=\frac{2^{x_1+1}-2^{x_2+1}}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}$，

$\because 2^{x_1+1}-2^{x_2+1}>0$，$(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)>0$，所以$f(x_1)-f(x_2)>0$，

$\therefore f(x_1)>f(x_2)$，所以函数$f(x)$是在R上的单调增函数.

(3)实数m满足对任意$x\in[-1,1]$，$f(4^x+4^{-x}-5)+f[m(2^x-2^{-x})]\leq0$恒成立，

即不等式$f(4^x+4^{-x}-5)\leq f[m(2^{-x}-2^x)]$恒成立，

由(2)函数$f(x)$在R上单调递增，所以原问题转化为不等式$4^x+4^{-x}-5+m(2^x-2^{-x})\leq0$，

令$t=2^x-2^{-x}$，因为$x\in[-1,1]$，且$t=2^x-2^{-x}$为增函数，所以有$t\in\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right]$，

且有$4^x+4^{-x}=(2^x-2^{-x})^2+2=t^2+2$，

所以有$t^2+mt-3\le 0$在$t\in\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right]$上恒成立，

设$h(t)=t^2+mt-3$，$t\in\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right]$，则有$h(t)_{\max}\le 0$，

因为$h(t)$开口向上，所以有$h(t)_{\max}=\max\left\{h(-\frac{3}{2}),h(\frac{3}{2})\right\}$，

所以$\begin{cases}h(-\frac{3}{2})\le 0,\\ h(\frac{3}{2})\le 0,\end{cases}$解得$-\frac{1}{2}\le m\le\frac{1}{2}$，所以$m$的取值范围是$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

21.【答案】解：（1）$L(x)=\begin{cases}-\frac{1}{3}x^2+40x-250,0<x<80,\\ -x-\frac{10000}{x}+1200,x\ge 80.\end{cases}$

(2)当$0<x<80$时，$L(x)=-\frac{1}{3}x^2+40x-250=-\frac{1}{3}(x-60)^2+950$，故$L(x)_{\max}=L(60)=950$，

当$x\ge 80$时，$L(x)=-x-\frac{10000}{x}+1200\le -2\sqrt{x\cdot\frac{10000}{x}}+1200=1000$，当$x=\frac{10000}{x}$，即$x=100$时所获利润取到最大值.

因此当$x=100$(吨)时生产中所获利润最大，此时可购买$1000\times 1\%=10$万元学习用品.

22.【答案】解：(1)$a=1$，则$g(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+x+1$，

设函数$g(x)$的图象的对称中心为$(\frac{m}{2},g(\frac{m}{2}))$，则有$g(x)+g(m-x)=2f(\frac{m}{2})$，

即$\frac{1}{3}x^3+x^2+x+1+\frac{1}{3}(m-x)^3+(m-x)^2+m-x+1-2f(\frac{m}{2})=0$恒成立，

整理可得：$(m+2)x^2+Ax+B=0$恒成立，所以$m+2=0$，$A=0$，$B=0$，

$f(\frac{m}{2})=f(-1)=\frac{2}{3}$，所以函数$g(x)$的图象的对称中心为$(-1,\frac{2}{3})$.

(2)因为x_1，$x_2(x_1<x_2)$为函数$h(x)=x^2+2x+a$的两个零点，

所以有$\Delta=4-4a>0\Rightarrow a<1$，且$x_1+x_2=-2$，$x_1x_2=a$，$x_1^2+2x_1+a=0$，$x_2^2+2x_2+a=0$，

所以$g(x_1)=\frac{1}{3}x_1^3+x_1^2+ax_1+a=\frac{1}{3}(-2x_1^2-ax_1)+x_1^2+ax_1+a=\frac{1}{3}x_1^2+\frac{2a}{3}x_1+a$

$=\frac{1}{3}(-2x_1-a)+\frac{2a}{3}x_1+a=\frac{2}{3}[(a-1)x_1+a]$，同理可得$g(x_2)=\frac{2}{3}[(a-1)x_2+a]$，

$g(x)$在R上只有一个零点$\Leftrightarrow g(x_1)g(x_2)>0$，

即有$g(x_1)g(x_2)=\frac{4}{9}[(a-1)^2x_1x_2+a(a-1)(x_1+x_2)+a^2]=\frac{4}{9}a(a^2-3a+3)>0\Rightarrow a>0$，

所以a的取值范围为$(0,1)$.