江苏省仪征中学 2022-2023 学年度第一学期高一数学

期末考前演练试卷（七）

一、单项选择题（共 8 小题）.

1．设集合 $U=\{0，1，2，3\}$，$A=\{0，1，3\}$，$B=\{1，2\}$，则 $A\cap(\complement_U B)=$（　　）

A．$\{0，3\}$　　B．$\{1，3\}$　　C．$\{1\}$　　D．$\{0\}$

2．命题“$\exists x\in\mathbf{R}$，$x\leqslant0$”的否定是（　　）

A．$\forall x\in\mathbf{R}$，$x\leqslant0$　　B．$\forall x\in\mathbf{R}$，$x>0$　　C．$\exists x\in\mathbf{R}$，$x<0$　　D．$\exists x\in\mathbf{R}$，$x>0$

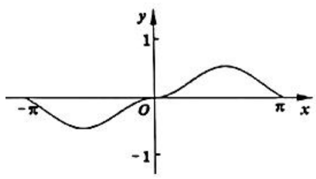
3．已知 $\sin(\pi-\alpha)=\frac{3}{5}$，$\alpha\in(\frac{\pi}{2}，\pi)$，则 $\cos\alpha=$（　　）

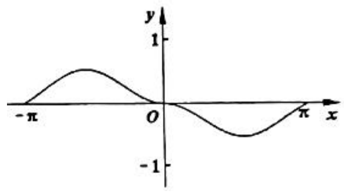
A．$\frac{3}{5}$　　B．$-\frac{3}{5}$　　C．$\frac{4}{5}$　　D．$-\frac{4}{5}$

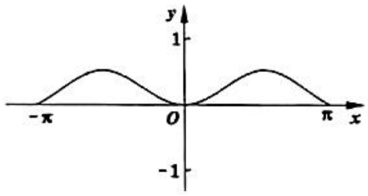
4．若方程 $x^3-(\frac{1}{2})^x=0$ 的解在区间 $[k，k+1]$（$k\in\mathbf{Z}$）内，则 k 的值是（　　）

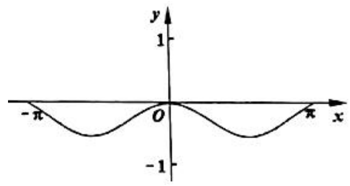
A．﹣1　　B．0　　C．1　　D．2

5．函数 $f(x)=\frac{x\sin x}{2^{|x|}+\cos x}$ 在 $[-\pi，\pi]$ 的图象大致为（　　）

A．

B．

C．

D．

6．设函数 $f(x)=\sin(2x-\frac{5\pi}{6})$，将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 φ（$\varphi>0$）个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，若 $g(x)$ 为偶函数，则 φ 的最小值是（　　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{2\pi}{3}$　　D．$\frac{5\pi}{6}$

7．计算器是如何计算 $\sin x$，$\cos x$，e^x，lnx，$\sqrt{x}$ 等函数值的？计算器使用的是数值计算法，其中一种方法是用容易计算的多项式近似地表示这些函数，通过计算多项式的值求出原函数的值，如 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$，$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$，其中 $n!=1\times2\times3\times\cdots\times n$．英国数学家泰勒（*B*．*Taylor*，1685﹣1731）发现了这些公式，可以看出，右边的项用得越多，计算得出的 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的值也就越精确．运用上述思想，可得到 $\cos1$ 的近似值为（　　）

A．0.50　　B．0.52　　C．0.54　　D．0.56

8．已知如下结论：当 $0<x<2$ 或 $x>4$ 时，$2^x>x^2$；当 $2<x<4$ 时，$2^x<x^2$，请比较 $a=\log_4 3$，$b=\sin\frac{\pi}{3}$，$c=2^{-\cos\frac{\pi}{3}}$的大小关系（　　）

A．$a>b>c$　　　　B．$b>a>c$　　　　C．$c>a>b$　　　　D．$b>c>a$

二、多项选择题（共 4 小题）．

9．下列说法中，正确的有（　　）

A．若 $a<b<0$，则 $ab>b^2$　　B．若 $a>b>0$，则$\frac{b}{a}>\frac{a}{b}$

C．若对$\forall x\in$（0，+∞），$x+\frac{1}{x}\geqslant m$恒成立，则实数 m 的最大值为 2

D．若 $a>0$，$b>0$，$a+b=1$，则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的最小值为 4

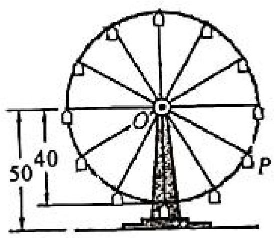
10．如图，摩天轮的半径为 40 米，点 O 距地面的高度为 50 米，摩天轮按逆时针方向做匀速转动，每 30 分钟转一图，摩天轮上点 P 的起始位置在最低点处，下面的有关结论正确的有（　　）

A．经过 15 分钟，点 P 首次到达最高点

B．从第 10 分钟到第 20 分钟摩天轮上的点 P 距离地面的高度一直在升高

C．若摩天轮转速减半，则其旋转一圈所需要的时间变为原来的$\frac{1}{2}$倍

D．在摩天轮转动的一圈内，有 10 分钟的时间点 P 距离地面超过 $70m$



11．设函数 $f(x)=\begin{cases}|\ln x|, & x>0\\ -x^2-4x, & x\leqslant 0\end{cases}$，若函数 $g(x)=f(x)-m$ 有四个零点，则实数 m 可取（　　）

A．﹣1　　　　B．1　　　　C．3　　　　D．5

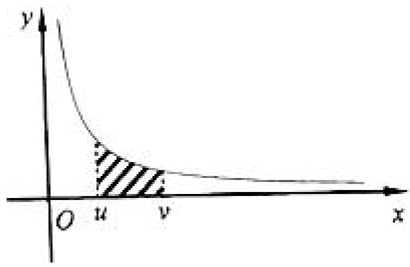
12．对于任意两正数 u，v（$u<v$），记区间$[u，v]$上曲线$f(x)=\frac{1}{x}$下的曲边梯形（图中阴影部分）面积为 $L(u，v)$，并约定 $L(u，u)=0$ 和 $L(v，u)=-L(u，v)$，且 $L(1，x)=\ln x$，则下列命题中正确的有（　　）

A．$L(1，6)=L(1，2)+L(1，3)$

B．$L(1，uv)=L(1，u)+L(u，uv)$

C．$f\left(\frac{u+v}{2}\right)>\frac{f(u)+f(v)}{2}$

D．对正数 u，h 有$\frac{h}{u+h}<L(u，u+h)<\frac{h}{u}$



三、填空题（共 4 小题）．

13．已知幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$图象过点$(\sqrt{2}，2)$，则 $f(9)=$_______．

14．已知扇形的半径为 $6cm$，圆心角为 $2rad$，则该扇形的面积为_______．

15．已知函数 $f(x)=x|x|$，则满足 $f(x)+f(3x-2)\geqslant 0$ 的 x 的取值集合是_______．

16．定义域为 **R** 的函数 $F(x)=2^x$ 可以表示为一个奇函数 $f(x)$ 和一个偶函数 $g(x)$ 的和，则 $f(x)$ =________；若关于 x 的不等式 $f(x)+a\geqslant bF(-x)$ 的解的最小值为 1，其中 a，$b\in$**R**，则 a 的取值范围是________.

四、解答题（本大题共 6 小题，计 70 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

17．计算：（1）$2\lg 4+\lg\frac{5}{8}$；（2）$8^{-\frac{1}{2}}+\frac{(-4)^0}{\sqrt{2}}-\sqrt{(-\sqrt{2})^2}$.

18．已知关于 x 的不等式 $ax^2+x+2\geqslant 0$ 的解集为 A．（1）当 $a=0$ 时，“$x\in A$”是“$x\in\{x|m-1\leqslant x\leqslant m+1, m\in\mathbf{R}\}$”的必要条件，求 m 的取值范围；（2）若 $A=R$，求实数 a 的取值范围.

19．已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\Phi)(A>0,\ \omega>0,\ |\Phi|<\frac{\pi}{2})$，$M(\frac{\pi}{8},\ 2)$、$N(\frac{5\pi}{8},\ -2)$ 分别为其图象上相邻的最高点、最低点.

（1）求函数 $f(x)$ 的解析式；（2）求函数 $f(x)$ 在 $[0,\ \frac{\pi}{2}]$ 上的单调区间和值域.

20．现有三个条件：①对任意的 $x\in$**R** 都有 $f(x+1)-f(x)=2x-2$；②不等式 $f(x)<0$ 的解集为 $\{x|1<x<2\}$；③函数 $y=f(x)$ 的图象过点（3，2）．请你在上述三个条件中任选两个补充到下面的问题中，并求解（请将所选条件的序号填写在答题纸指定位置）

已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，且满足______（填所选条件的序号）.

（1）求函数 $f(x)$ 的解析式；（2）设 $g(x)=f(x)-mx$，若函数 $g(x)$ 在区间[1，2]上的最小值为 3，求实数 m 的值.

21．某小微企业去年某产品的年销售量为 1 万只，每只销售价为 10 元，成本为 8 元．今年计划投入适当的广告费进行促销，预计年销售量 P（万只）与投入广告费 x（万元）之间的函数关系为 $P=\frac{ax+1}{x+1}(x\geqslant 0)$，且当投入广告费为 4 万元时，销售量 3.4 万只．现每只产品的销售价为“原销售价”与“年平均每只产品所占广告费的 $\frac{1}{m}(m>0)$”之和．

（1）当投入广告费为 1 万元时，要使得该产品年利润不少于 4.5 万元，则 m 的最大值是多少？

（2）若 $m=3$，则当投入多少万元广告费时，该产品可获最大年利润？

22．若函数 $f(x)$ 的图象关于点 (a,b) 中心对称，则对函数 $f(x)$ 定义域中的任意 x，恒有 $f(x)=2b-f(2a-x)$．如：函数 $f(x)$ 的图象关于点（3，5）中心对称，则对函数 $f(x)$ 定义域中的任意 x，恒有 $f(x)=10-f(6-x)$．已知定义域为 $[0,2m+2]$ 的函数 $f(x)$，其图象关于点 $(m+1,e)$ 中心对称，且当 $x\in[0,m+1)$ 时，$f(x)=e^{|x-m|}$，其中实数 $m>-1$，e 为自然对数的底．

（1）计算 $f(m+1)$ 的值，并求函数 $f(x)$ 在 $[0,2m+2]$ 上的解析式；

（2）设函数 $g(x)=e(x^{\frac{1}{3}}+1)$，对任意 $x_1\in[0,2m+2]$，总存在 $x_2\in[(1-e)^3,(e-1)^3]$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$ 成立，求实数 m 的取值范围．

江苏省仪征中学 2022-2023 学年度第一学期高一数学

期末考前演练试卷（七）参考答案

一、单项选择题（共 8 小题）．

1．设集合 $U=\{0，1，2，3\}$，$A=\{0，1，3\}$，$B=\{1，2\}$，则 $A\cap(\complement_U B)=$（　　）

A．$\{0，3\}$　　　B．$\{1，3\}$　　　C．$\{1\}$　　　D．$\{0\}$

解：∵集合 $U=\{0，1，2，3\}$，$A=\{0，1，3\}$，$B=\{1，2\}$，

∴$\complement_U B=\{0，3\}$，

∴$A\cap(\complement_U B)=\{0，3\}$．

故选：A．

2．命题"$\exists x\in\mathbf{R}$，$x\leqslant 0$"的否定是（　　）

A．$\forall x\in\mathbf{R}$，$x\leqslant 0$　　　B．$\forall x\in\mathbf{R}$，$x>0$　　　C．$\exists x\in\mathbf{R}$，$x<0$　　　D．$\exists x\in\mathbf{R}$，$x>0$

解：因为特称命题的否定是全称命题，

所以"$\exists x\in\mathbf{R}$，$x\leqslant 0$"的否定是："$\forall x\in\mathbf{R}$，$x>0$"．

故选：B．

3．已知$\sin(\pi-\alpha)=\frac{3}{5}$，$\alpha\in(\frac{\pi}{2}，\pi)$，则 $\cos\alpha=$（　　）

A．$\frac{3}{5}$　　　B．$-\frac{3}{5}$　　　C．$\frac{4}{5}$　　　D．$-\frac{4}{5}$

解：因为$\sin(\pi-\alpha)=\frac{3}{5}$，$\alpha\in(\frac{\pi}{2}，\pi)$，

∴$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，

∴$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{4}{5}$．

故选：D．

4．若方程$x^3-(\frac{1}{2})^x=0$的解在区间$[k，k+1]$（$k\in\mathbf{Z}$）内，则 k 的值是（　　）

A．-1　　　B．0　　　C．1　　　D．2

解：设$f(x)=x^3-(\frac{1}{2})^x$，易知，$f(0)=0-1=-1<0$，$f(1)=1-\frac{1}{2}>0$，

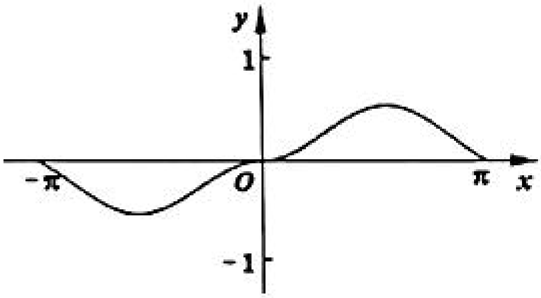
由零点定理知，$f(x)$在区间$[0，1]$内一定有零点，即方程$x^3-(\frac{1}{2})^x=0$一定有解．

所以 k 的值是 0，

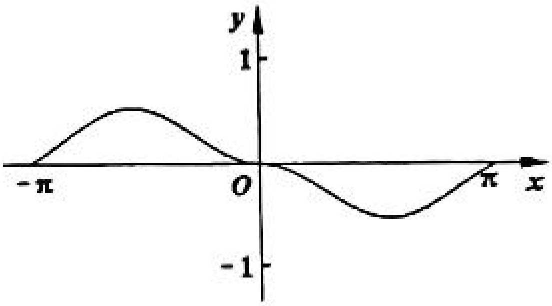
故选：B．

5．函数$f(x)=\frac{x\sin x}{2^{|x|}+\cos x}$在$[-\pi，\pi]$的图象大致为（　　）

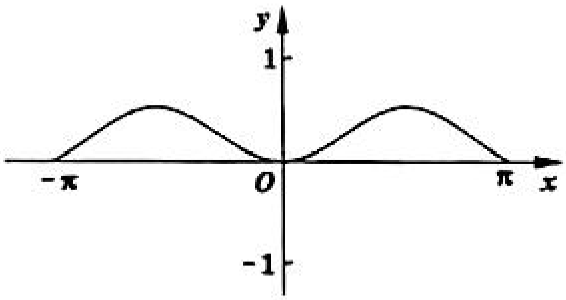
A.



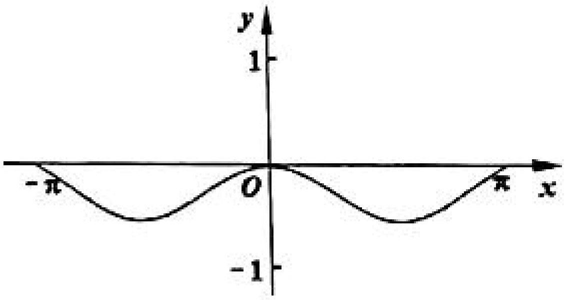
B.



C.



D.



解：函数$f(x)=\dfrac{x\sin x}{2^{|x|}+\cos x}$，

则$f(-x)=\dfrac{-x\sin(-x)}{2^{|-x|}+\cos(-x)}=\dfrac{x\sin x}{2^{|x|}+\cos x}=f(x)$，

可知$f(x)$是偶函数，排除A，B选项．

当$x=\dfrac{\pi}{2}$时，$f(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\frac{\pi}{2}}{2^{\frac{\pi}{2}}}>0$，∴图象在$x$轴的上方．

故选：C．

6．设函数$f(x)=\sin(2x-\dfrac{5\pi}{6})$，将函数$f(x)$的图象向左平移$\varphi$（$\varphi>0$）个单位长度，得到函数$g(x)$的图象，若$g(x)$为偶函数，则$\varphi$的最小值是（　　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{2\pi}{3}$　　D．$\frac{5\pi}{6}$

解：函数$f(x)=\sin(2x-\frac{5\pi}{6})$，将函数$f(x)$的图象向左平移$\varphi$（$\varphi>0$）个单位长度，

得到函数$g(x)=\sin(2x+2\varphi-\frac{5\pi}{6})$的图象．

若$g(x)$为偶函数，则$2\varphi-\frac{5\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

令$k=-1$，求得φ的最小值为$\frac{\pi}{6}$，

故选：A．

7．计算器是如何计算$\sin x$，$\cos x$，e^x，$\ln x$，$\sqrt{x}$等函数值的？计算器使用的是数值计算法，其中一种方法是用容易计算的多项式近似地表示这些函数，通过计算多项式的值求出原函数的值，如$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$，$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$，其中$n!=1\times2\times3\times\cdots\times n$．英国数学家泰勒（$B$．*Taylor*，1685﹣1731）发现了这些公式，可以看出，右边的项用得越多，计算得出的$\sin x$和$\cos x$的值也就越精确．运用上述思想，可得到$\cos1$的近似值为（　　）

A．0.50　　B．0.52　　C．0.54　　D．0.56

解：由题意可得，$\cos1=1-\frac{1^2}{2!}+\frac{1^4}{4!}-\frac{1^6}{6!}+\cdots=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{24}-\frac{1}{720}+\cdots$

$=1-0.5+0.041-0.001+\cdots\approx0.54$，

故选：C．

8．在必修第一册教材“8.2.1 几个函数模型的比较”一节的例2中，我们得到如下结论：当$0<x<2$或$x>4$时，$2^x>x^2$；当$2<x<4$时，$2^x<x^2$，请比较$a=\log_43$，$b=\sin\frac{\pi}{3}$，$c=2^{-\cos\frac{\pi}{3}}$的大小关系（　　）

A．$a>b>c$　　B．$b>a>c$　　C．$c>a>b$　　D．$b>c>a$

解：$b=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$c=2^{-\cos\frac{\pi}{3}}=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}<b$，故$b>c$

因为$2^{\sqrt{2}}<2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}<3$，故$\frac{\sqrt{2}}{2}=\log_42^{\sqrt{2}}<\log_43$，所以$c<a$，

因为$0<\sqrt{3}<2$，所以$2^{\sqrt{3}}>(\sqrt{3})^2$，故$b=\frac{\sqrt{3}}{2}=\log_42^{\sqrt{3}}>\log_4\sqrt{3}^2=a$，故$b>a$，

所以$b>a>c$．

故选：B．

二、多项选择题（本大题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得3分）

9．下列说法中，正确的有（　　）

A．若 $a<b<0$，则 $ab>b^2$

B．若 $a>b>0$，则 $\frac{b}{a}>\frac{a}{b}$

C．若对 $\forall x\in$（0，+∞），$x+\frac{1}{x}\geqslant m$ 恒成立，则实数 m 的最大值为 2

D．若 $a>0$，$b>0$，$a+b=1$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为 4

解：$a<b<0$，则 $ab-b^2=b(a-b)>0$，则 $ab>b^2$，所以 A 正确；

若 $a>b>0$，则 $\frac{b}{a}-\frac{a}{b}=\frac{b^2-a^2}{ab}<0$，所以 $\frac{b}{a}<\frac{a}{b}$，所以 B 不正确；

对 $\forall x\in$（0，+∞），$x+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2\geqslant m$ 恒成立（当且仅当 $x=1$ 时取等号），则实数 m 的最大值为 2，所以 C 正确；

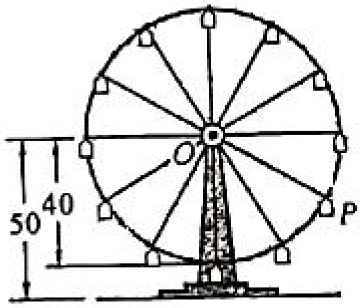
若 $a>0$，$b>0$，$a+b=1$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})(a+b)=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 4$，当且仅当 $a=b=1$ 时取等号，

所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为 4，

所以 D 正确；

故选：ACD．

10．如图，摩天轮的半径为 40 米，点 O 距地面的高度为 50 米，摩天轮按逆时针方向做匀速转动，每 30 分钟转一图，摩天轮上点 P 的起始位置在最低点处，下面的有关结论正确的有（　　）



A．经过 15 分钟，点 P 首次到达最高点

B．从第 10 分钟到第 20 分钟摩天轮上的点 P 距离地面的高度一直在升高

C．若摩天轮转速减半，则其旋转一圈所需要的时间变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍

D．在摩天轮转动的一圈内，有 10 分钟的时间点 P 距离地面超过 70m

解：由图形知，可以以点 O 在地面上的垂足为原点，OP 所在直线为 y 轴，与 OP 垂直的向右的方向为 x 轴建立坐标系，

设 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+k$，$x$ 表示时间．

由题意可得：$A=40$，$k=50$，$T=30$，可得 $\omega=\frac{2\pi}{30}=\frac{\pi}{15}$，

因为 P（0，10），

可得 $10=40\sin\left(\frac{\pi}{15}\times 0+\varphi\right)+50$，解得 $\sin\varphi=-1$，可得 $\varphi=-\frac{\pi}{2}$，

故有点 P 离地面的高度 $h=40\sin\left(\frac{\pi}{15}x-\frac{\pi}{2}\right)+50$，

A．经过 15 分钟，$h=40\sin\left(\frac{\pi}{15}\times 15-\frac{\pi}{2}\right)+50=90$．点 P 首次到达最高点，故 A 正确；

B．经过 15 分钟，点 P 首次到达最高点，再经过 15 分钟，点 P 到达最低点．故 B 错误；

C．若摩天轮转速减半，则其周期变为原来的 2 倍，故 C 错误；

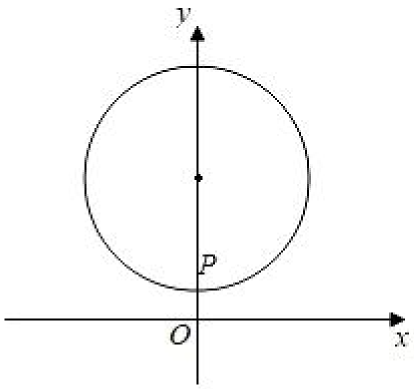
D．令 $f(t)>70$，可得 $40\sin\left(\frac{\pi}{15}x-\frac{\pi}{2}\right)+50>70$，化为：$\cos\frac{\pi}{15}x<-\frac{1}{2}$ ，

可得 $2k\pi+<\frac{\pi}{15}x<2k\pi+\frac{4\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，

解得 $30k+10<x<30k+20$，$k\in\mathbf{Z}$，

可得 $20-10=10$，在摩天轮转动的一圈内，有 10 分钟的时间点 P 距离地面超过 $70m$，故 D 正确．

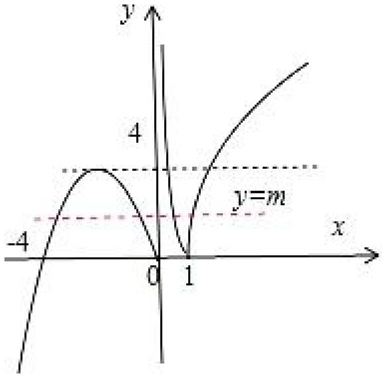
故选：AD．



11．设函数 $f(x)=\begin{cases}|\ln x|, & x>0\\ -x^2-4x, & x\leqslant 0\end{cases}$，若函数 $g(x)=f(x)-m$ 有四个零点，则实数 m 可取（　　）

A．-1　　　　B．1　　　　C．3　　　　D．5

解：令 $g(x)=0$ 得 $f(x)=m$，做出 $f(x)$ 的函数图象如图所示：

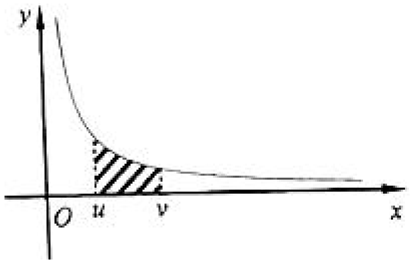


∵函数 $f(x)$ 的图象与 $y=m$ 有四个交点，

∴m 的取值范围为 $0<m<4$．

故选：BC．

12．对于任意两正数 u，v（$u<v$），记区间$[u，v]$上曲线$f(x)=\frac{1}{x}$下的曲边梯形（图中阴影部分）面积为 L（u，v），并约定 L（u，u）$=0$ 和 L（v，u）$=-L$（u，v），且 L（1，x）$=lnx$，则下列命题中正确的有（　　）



A．$L(1，6)=L(1，2)+L(1，3)$

B．$L(1，uv)=L(1，u)+L(u，uv)$

C．$f(\frac{u+v}{2})>\frac{f(u)+f(v)}{2}$

D．对正数 u，h 有$\frac{h}{u+h}<L(u，u+h)<\frac{h}{u}$

解：对于 A，$L(1，6)=ln6=ln2+ln3=L(1，2)+L(1，3)$，则 A 对；

对于 B，对于区间$[1，uv]=[1，u]\cup[u，uv]$，$[1，u]\cap[u，uv]=\{u\}$，

由题设得，$L(1，uv)=L(1，u)+L(u，uv)$，则 B 对；

对于 C，由于 $f(x)$ 是向下凸函数，则 C 错；

对于 D，存在 $t\in(v，v+h)$，使得 $f(t)h=L(v，v+h)$，

$t\in(v，v+h)\Rightarrow\frac{1}{v+h}<\frac{1}{t}<\frac{1}{v}\Rightarrow\frac{h}{v+h}<f(t)h<\frac{h}{v}$

$\Rightarrow\frac{h}{v+h}<L(v，v+h)<\frac{h}{v}$，则 D 对；

故选：ABD．

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13．已知幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$图象过点$(\sqrt{2}，2)$，则 $f(9)=$__81__．

解：∵幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$图象过点$(\sqrt{2}，2)$，

∴$f(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^{\alpha}=2$，解得$\alpha=2$，

∴$f(x)=x^2$，

∴$f(9)=9^2=81$．

故答案为：81．

14．已知扇形的半径为 $6cm$，圆心角为 $2rad$，则该扇形的面积为__$36cm^2$__．

解：由题意得，$S=\frac{1}{2}\alpha r^2=\frac{1}{2}\times 2\times 36=36cm^2$，

故答案为：$36cm^2$．

15．已知函数 $f(x)=x|x|$，则满足 $f(x)+f(3x-2)\geqslant 0$ 的 x 的取值范围是__$[\frac{1}{2},+\infty)$__．（用区间表示）

解：$f(-x)=-f(x)$，且 $f(x)=x|x|=\begin{cases}x^2 & x\geqslant 0\\ -x^2 & x<0\end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

∴由 $f(x)+f(3x-2)\geqslant 0$ 得，$f(x)\geqslant f(2-3x)$，

∴$x\geqslant 2-3x$，解得 $x\geqslant\frac{1}{2}$，

∴x 的取值范围是：$[\frac{1}{2},+\infty)$．

故答案为：$[\frac{1}{2},+\infty)$．

16．定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $F(x)=2^x$ 可以表示为一个奇函数 $f(x)$ 和一个偶函数 $g(x)$ 的和，则 $f(x)=$ $\frac{1}{2}(2^x-2^{-x})$__；若关于 x 的不等式 $f(x)+a\geqslant bF(-x)$ 的解的最小值为 1，其中 a，$b\in\mathbf{R}$，则 a 的取值范围是__$a\neq -2$__．

解：由题意可得 $f(x)+g(x)=F(x)=2^x$，①

又 $f(-x)+g(-x)=F(-x)=2^{-x}$，

即为 $-f(x)+g(x)=2^{-x}$，②

由①②解得 $f(x)=\frac{1}{2}(2^x-2^{-x})$；

关于 x 的不等式 $f(x)+a\geqslant bF(-x)$

即为 $\frac{1}{2}(2^x-2^{-x})+a\geqslant b\cdot 2^{-x}$，

整理可得 $2^x-(1+2b)2^{-x}+2a\geqslant 0$，

可令 $t=2^x$，由 $x\geqslant 1$ 可得 $t\geqslant 2$，

所以 $t-(1+2b)\cdot\frac{1}{t}+2a\geqslant 0$，即 $t^2+2at-(1+2b)\geqslant 0$，

由题意可得 $t^2+2at-(1+2b)\geqslant 0$ 的解的最小值为 $t=2$，

所以 $\triangle=4a^2+4(1+2b)>0$，即 $2b>-1-a^2$，

又 $4+4a-1-2b\geqslant 0$，即有 $3+4a\geqslant 2b$，

则 $3+4a>-1-a^2$，

解得 $a\neq -2$．

故答案为：$f(x)=\frac{1}{2}(2^x-2^{-x})$；$a\neq-2$.

四、解答题（本大题共6小题，计70分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

17．计算：

（1）$2\lg4+\lg\frac{5}{8}$；

（2）$8^{-\frac{1}{2}}+\frac{(-4)^0}{\sqrt{2}}-\sqrt{(-\sqrt{2})^2}$.

解：（1）原式$=\lg16+\lg\frac{5}{8}=\lg10=1$；

（2）原式$=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

18．已知关于x的不等式$ax^2+x+2\geqslant0$的解集为A.

（1）当$a=0$时，"$x\in A$"是"$x\in\{x|m-1\leqslant x\leqslant m+1,\ m\in\mathbf{R}\}$"的必要条件，求$m$的取值范围；

（2）若$A=R$，求实数a的取值范围.

解：（1）当$a=0$时，由$x+2\geqslant0$，得$x\geqslant-2$，所以$A=[-2,+\infty)$，

因为"$x\in A$"是"$x\in\{x|m-1\leqslant x\leqslant m+1,\ m\in\mathbf{R}\}$"的必要条件，

所以$[m-1,m+1]\subseteq[-2,+\infty)$，所以$m-1\geqslant-2$，得$m\geqslant-1$，

故实数m的取值范围为$[-1,+\infty)$.

（2）1°当$a=0$时，不等式即为$x+2\geqslant0$，不符合题意.

2°当$a\neq0$时，因为$ax^2+x+2\geqslant0$的解集为$\mathbf{R}$，

所以，解得$a\geqslant\frac{1}{8}$.

综上，实数a的取值范围是$[\frac{1}{8},+\infty)$.

19．已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\phi)(A>0,\ \omega>0,\ |\phi|<\frac{\pi}{2})$，$M(\frac{\pi}{8},2)$、$N(\frac{5\pi}{8},-2)$分别为其图象上相邻的最高点、最低点.

（1）求函数$f(x)$的解析式；

（2）求函数$f(x)$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上的单调区间和值域.

解：（1）因为$f(x)$图象上相邻两个最高点和最低点分别为$(\frac{\pi}{8},2)$，$(\frac{5\pi}{8},-2)$，

所以$A=2$，$\frac{T}{2}=\frac{5\pi}{8}-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$，解得$T=\pi$；

又$T=\frac{2\pi}{|\omega|}$，$\omega>0$，所以$\omega=2$，$f(x)=2\sin(2x+\varphi)$；

又图象过点$(\frac{\pi}{8},2)$，所以$2=2\sin(2\times\frac{\pi}{8}+\phi)$，即$\sin(\frac{\pi}{4}+\phi)=1$；

所以$\frac{\pi}{4}+\phi=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，即$\phi=2k\pi+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$.

又$|\phi|<\frac{\pi}{2}$，所以$\phi=\frac{\pi}{4}$，所以$f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{4})$.

（2）由$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得$k\pi-\frac{3\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{8}$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以f（x）的单调递增区间为$[k\pi-\frac{3\pi}{8}, k\pi+\frac{\pi}{8}]$，$k\in\mathbf{Z}$；

又$x\in[0, \frac{\pi}{2}]$，所以f（x）的单调递增区间为$[0, \frac{\pi}{8}]$，

同理f（x）的单调递减区间为$[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2}]$.

又$f(0)=2\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$，$f(\frac{\pi}{8})=2$，$f(\frac{\pi}{2})=-\sqrt{2}$，

所以当$x\in[0, \frac{\pi}{2}]$时，f（x）值域为$[-\sqrt{2}, 2]$.

20．现有三个条件：①对任意的$x\in\mathbf{R}$都有f（$x+1$）$-f$（x）$=2x-2$；②不等式f（x）<0的解集为$\{x|1<x<2\}$；③函数$y=f$（x）的图象过点（3，2）．请你在上述三个条件中任选两个补充到下面的问题中，并求解（请将所选条件的序号填写在答题纸指定位置）

已知二次函数f（x）$=ax^2+bx+c$，且满足_____（填所选条件的序号）．

（1）求函数f（x）的解析式；

（2）设g（x）$=f$（x）$-mx$，若函数g（x）在区间$[1, 2]$上的最小值为3，求实数m的值．

解：（1）条件①：因为f（x）$=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$），

所以f（$x+1$）$-f$（x）$=a(x+1)^2+b(x+1)+c-(ax^2+bx+c)=2ax+a+b=2x-2$，

即$2(a-1)x+a+b+2=0$对任意的x恒成立，

所以$\begin{cases}a-1=0\\a+b+2=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=1\\b=-3\end{cases}$，

条件②：因为不等式f（x）<0的解集为$\{x|1<x<2\}$，

所以$\begin{cases}1+2=-\frac{b}{a}\\1\times 2=\frac{c}{a}\\a+b+c=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}b=-3a\\c=2a\end{cases}$，且$a>0$，

条件③：函数$y=f$（x）的图象过点（3，2），所以$9a+3b+c=2$，

若选择条件①②：则$a=1$，$b=-3$，$c=2$，此时f（x）$=x^2-3x+2$；

若选择条件①③：则$a=1$，$b=-3$，$c=2$，此时f（x）$=x^2-3x+2$；

若选择条件②③：则$a=1$，$b=-3$，$c=2$，此时f（x）$=x^2-3x+2$．

（2）由（1）知g（x）$=x^2-(m+3)x+2$，其对称轴为$x=\frac{m+3}{2}$，

①当$\frac{m+3}{2}\leqslant 1$，即 $m\leqslant -1$ 时，$g(x)_{min}=g(1)=3-(m+3)=-m=3$，解得 $m=-3$，

②当$\frac{m+3}{2}\geqslant 2$，即 $m\geqslant 1$ 时，$g(x)_{min}=g(2)=6-(2m+6)=-2m=3$，解得$m=-\frac{3}{2}$（舍），

③当 $1<\frac{m+3}{2}<2$，即 $-1<m<1$ 时，$g(x)_{min}=g(\frac{m+3}{2})=-\frac{(m+3)^2}{4}+2=3$，无解.

综上所述，所求实数 m 的值为 -3.

21．某小微企业去年某产品的年销售量为 1 万只，每只销售价为 10 元，成本为 8 元．今年计划投入适当的广告费进行促销，预计年销售量 P（万只）与投入广告费 x（万元）之间的函数关系为$P=\frac{ax+1}{x+1}(x\geqslant 0)$，且当投入广告费为 4 万元时，销售量 3.4 万只．现每只产品的销售价为“原销售价”与“年平均每只产品所占广告费的$\frac{1}{m}(m>0)$”之和．

（1）当投入广告费为 1 万元时，要使得该产品年利润不少于 4.5 万元，则 m 的最大值是多少？

（2）若 $m=3$，则当投入多少万元广告费时，该产品可获最大年利润？

解：$x=4$ 时，$P=3.4$，$\therefore\frac{4a+1}{4+1}=\frac{17}{5}$，解得 $a=4$，故$P=\frac{4x+1}{x+1}$.

（1）当投入广告费为 1 万元时，$P=\frac{5}{2}$，销售价为$10+\frac{1}{P}\cdot\frac{1}{m}$，

年利润$W=(10+\frac{1}{P}\cdot\frac{1}{m})P-8P-1=2P+\frac{1}{m}-1=4+\frac{1}{m}\geqslant 4.5$，得 $m\leqslant 2$，

$\therefore m$ 的最大值为 2.

故要使得该产品年利润不少于 4.5 万元，则 m 的最大值是 2；

（2）当 $m=3$ 时，年利润$W=(10+\frac{x}{P}\cdot\frac{1}{3})P-8P-x=2P-\frac{2}{3}x=2\cdot\frac{4x+1}{x+1}-\frac{2x}{3}$

$=\frac{26}{3}-[\frac{6}{x+1}+\frac{2(x+1)}{3}]\leqslant\frac{26}{3}-2\sqrt{\frac{6}{x+1}\cdot\frac{2(x+1)}{3}}=\frac{14}{3}$，

当且仅当$\frac{6}{x+1}=\frac{2(x+1)}{3}$，即 $x=2$ 时等号成立.

故当投入 2 万元广告费时，该产品可获最大年利润.

22．若函数 $f(x)$ 的图象关于点 (a,b) 中心对称，则对函数 $f(x)$ 定义域中的任意 x，恒有 $f(x)=2b-f(2a-x)$．如：函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(3,5)$ 中心对称，则对函数 $f(x)$ 定义域中的任意 x，恒有 $f(x)=10-f(6-x)$．已知定义域为 $[0,2m+2]$ 的函数 $f(x)$，其图象关于点 $(m+1,e)$ 中心对称，且当 $x\in[0,m+1)$ 时，$f(x)=e^{|x-m|}$，其中实数 $m>-1$，e 为自然对数的底.

（1）计算 $f(m+1)$ 的值，并求函数 $f(x)$ 在 $[0,2m+2]$ 上的解析式；

（2）设函数$g(x)=e(x^{\frac{1}{3}}+1)$，对任意 $x_1\in[0,2m+2]$，总存在$x_2\in[(1-e)^3,(e-1)^3]$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$ 成立，求实数 m 的取值范围.

解：（1）因为 $f(x)$ 图象关于点 $(m+1,e)$ 中心对称，

所以 $f(x)=2e-f(2m+2-x)$，

则 $f(m+1)=2e-f(2m+2-m-1)$，即 $f(m+1)=e$.

当 $x\in(m+1, 2m+2]$ 时，$2m+2-x\in[0, m+1)$，

则 $f(x)=2e-f(2m+2-x)=2e-e^{|m+2-x|}$.

综上，$f(x)=\begin{cases} e^{|x-m|}, & 0\leqslant x\leqslant m+1 \\ 2e-e^{|m+2-x|}, & m+1<x\leqslant 2m+2 \end{cases}$.

（2）设 $f(x)$ 在区间 $[0, 2m+2]$ 上值域为 A，$g(x)=e(x^{\frac{1}{3}}+1)$ 在 $[(1-e)^3, (e-1)^3]$ 的值域为 B，

则 $B=[2e-e^2, e^2]$.

因为对任意 $x_1\in[0, 2m+2]$，总存在 $x_2\in[(1-e)^3, (e-1)^3]$，

使得 $f(x_1)=g(x_2)$ 成立，所以 $A\subseteq B$.

①当 $-1<m\leqslant 0$ 时，$f(x)=\begin{cases} e^{x-m} & 0\leqslant x\leqslant m+1 \\ 2e-e^{m+2-x} & m+1<x\leqslant 2m+2 \end{cases}$.

当 $0\leqslant x\leqslant m+1$ 时，$f(x)=e^{x-m}\in[e^{-m}, e]$，

当 $m+1<x\leqslant 2m+2$ 时，$f(x)=2e-e^{m+2-x}\in(e, 2e-e^{-m}]$，

所以 $f(x)$ 值域为 $[e^{-m}, 2e-e^{-m}]$.

又因为 $-1<m\leqslant 0$，所以 $2e-e^2<0<e^{-m}$，$2e-e^{-m}<2e<e^2$，

所以 $A\subseteq B$，符合题意.

②当 $m>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[0, m]$ 上单调递减，在 $[m, m+1]$ 上单调递增，

又 $f(x)$ 图象关于点 $(m+1, e)$ 中心对称，

所以 $f(x)$ 在 $[0, m]$ 和 $[m+2, 2m+2]$ 上单调递减，在 $[m, m+2]$ 上单调递增，

又 $f(0)=e^m$，$f(m)=1$，$f(m+2)=2e-1$，$f(2m+2)=2e-e^m$，

因为 $2e-e^2\leqslant 1\leqslant e^2$，$2e-e^2\leqslant 2e-1\leqslant e^2$，

所以要使得 $A\subseteq B$，只需，解得 $m\leqslant 2$.

又 $m>0$，所以 $0<m\leqslant 2$.

综上，m 的取值范围是 $(-1, 2]$.