江苏省仪征中学 2022-2023 学年度第一学期高一数学期末复习导学案

三角函数复习（2）

研制人：王桂芳　　审核人：邓迎春

班级：______姓名：____________学号：________授课日期：______________

一、知识梳理

1．根据 y=sinx、y=cosx 和 $y=\tan x$ 的图像完成下列表格

	正弦函数 $y=\sin x$	余弦函数 $y=\cos x$	正切函数 $y=\tan x$
图象			
定义域			
值域			
周期性			
奇偶性			
单调性	增区间________________ 减区间________________	增区间______________ 减区间______________	增区间__________
最值	最大值__，此时 $x=$______ 最小值__，此时 $x=$______	最大值__，此时 $x=$____ 最小值__，此时 $x=$____	
对称性	对称轴____________ 对称中心__________	对称轴____________ 对称中心__________	渐近线____________ 对称中心__________

2．由 $y=\sin x$ 的图像经过怎样的变换得到 $y=A\sin(wx+\varphi)$ 的图像

二、课前热身

1．给出下列函数：

①$y=\cos|2x|$；②$y=|\cos x|$；③$y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$；④$y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.

其中最小正周期为π的有（　　）

A．①②③　　　　B．①③④　　　　C．②④　　　　D．①③

【答案】A

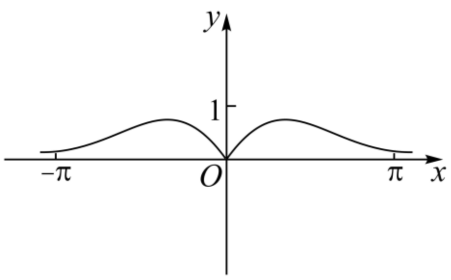
2．函数 $f(x)=\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-1$ 图象的一个对称中心为（　　）

A．$\left(\frac{\pi}{12},-1\right)$　　　　B．$\left(\frac{7\pi}{12},-1\right)$

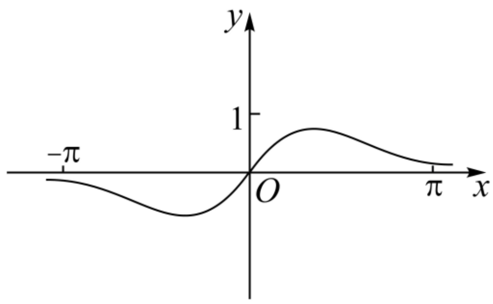
C．$\left(-\frac{7\pi}{12},1\right)$　　　　D．$\left(-\frac{\pi}{12},-1\right)$

【答案】D

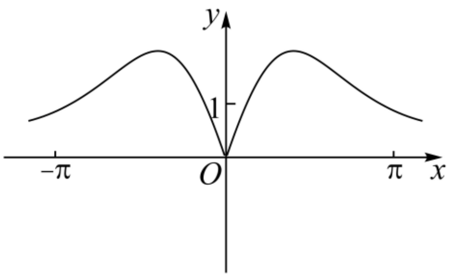
3．函数 $f(x)=\frac{\sin x+2x}{\cos x+x^2}$ 的图像大致为（　　）



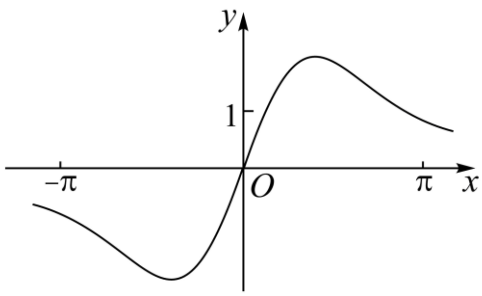
A．



B．



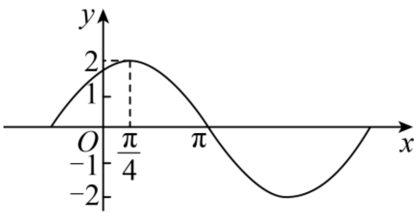
C．



D．

【答案】D

4．（多选）函数 $y=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$（$A>0$，$\omega>0$，$0<\varphi<\pi$）在一个周期内的图像如图所示，则（　　）



A．该函数的解析式为 $y=2\sin\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{3}\right)$

B．该函数图像的对称中心为 $\left(k\pi-\frac{\pi}{3},0\right)$，$k\in Z$

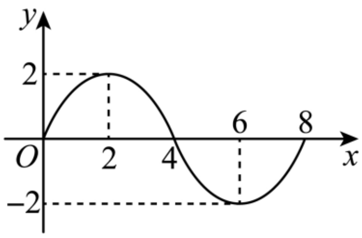
C．该函数的增区间是 $\left[3k\pi-\frac{5\pi}{4},3k\pi+\frac{\pi}{4}\right]$，$k\in Z$

D．把函数 $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图像上所有点的横坐标伸长为原来的 $\frac{3}{2}$ 倍，纵坐标不变，可得到该函数图像

【答案】ACD

5．函数 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)(A>0,\omega>0)$ 的部分图象如图所示，则 $f\left(1\right)+f\left(2\right)+f\left(3\right)+\ldots+f\left(21\right)$ 的值等于

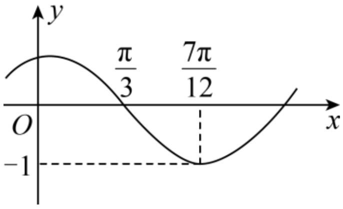
__________.



【答案】$2+\sqrt{2}$

三、典型例题

例 1．已知函数 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$（其中 $A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}$）的图像如图所示.



(1)求函数 $f\left(x\right)$ 的解析式；

(2)若将函数 $y=f\left(x\right)$ 的图像上的所有点的纵坐标不变，横坐标伸长到原来的3倍，得到函数 $g\left(x\right)$ 的图像，求当 $x\in\left[0,\frac{5\pi}{4}\right]$时，函数 $y=g\left(x\right)$ 的值域.

【答案】(1) $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

(2)$\left[-\frac{1}{2},1\right]$

【分析】（1）根据图像得到 A=1，$\frac{T}{4}=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}$，进而求得$\omega$，再由点$\left(\frac{7\pi}{12},-1\right)$在图像上求解；

（2）利用伸缩变换得到$g\left(x\right)=\sin\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{3}\right)$，再利用正弦函数的性质求解.

【详解】（1）解：由图像知：A=1，$\frac{T}{4}=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}$，则$T=\pi$，$\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，

所以 $f\left(x\right)=\sin\left(2x+\varphi\right)$，

因为点$\left(\frac{7\pi}{12},-1\right)$在图像上，所以$\sin\left(\frac{7\pi}{6}+\varphi\right)=-1$，

所以$\frac{7\pi}{6}+\varphi=2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathrm{Z}$，解得$\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{3},k\in\mathrm{Z}$，

因为$\left|\varphi\right|<\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=\frac{\pi}{3}$，

所以 $f\left(x\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$；

（2）解：由题意得$g\left(x\right)=\sin\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{3}\right)$，

因为$x\in\left[0,\frac{5\pi}{4}\right]$，则$\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{6}\right]$，

所以，当$\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即$x=\frac{\pi}{4}$时，$g\left(x\right)=\sin\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{3}\right)$有最大值1；

当$\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{6}$，即$x=\frac{5\pi}{4}$时，$g\left(x\right)=\sin\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{3}\right)$有最小值$-\frac{1}{2}$

所以$g\left(x\right)=\sin\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$，即$g\left(x\right)$的值域为$\left[-\frac{1}{2},1\right]$.

例 2. 已知函数 $f\left(x\right)=\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)$.

(1)求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间;

(2)求函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[-\pi,\pi\right]$ 上的单调增区间;

(3)求函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值和最大值.

【详解】(1)解:由题知 $f\left(x\right)=\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=\sqrt{3}\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$,

令 $2k\pi-\pi\le 2x-\frac{\pi}{6}\le 2k\pi,k\in\mathrm{Z}$,

得 $k\pi-\frac{5\pi}{12}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{12},k\in\mathrm{Z}$,

令 $2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\pi,k\in\mathrm{Z}$,

得 $k\pi+\frac{\pi}{12}\le x\le k\pi+\frac{7\pi}{12},k\in\mathrm{Z}$,

故 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{\pi}{12}\right]\left(k\in\mathrm{Z}\right)$;

单调递减区间为 $\left[k\pi+\frac{\pi}{12},k\pi+\frac{7\pi}{12}\right]\left(k\in\mathrm{Z}\right)$;

(2)由(1)可得 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{\pi}{12}\right]\left(k\in\mathrm{Z}\right)$

令 $k=-1$, $f\left(x\right)$ 在 $\left[-\frac{17\pi}{12},-\frac{11\pi}{12}\right]$ 单调递增,

令 $k=0$, $f\left(x\right)$ 在 $\left[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right]$ 单调递增,

令 $k=1$, $f\left(x\right)$ 在 $\left[\frac{7\pi}{12},\frac{13\pi}{12}\right]$ 单调递增,

因为 $x\in\left[-\pi,\pi\right]$,

所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left[-\pi,\pi\right]$ 上的单调增区间是

$\left[-\pi,-\frac{11\pi}{12}\right],\left[-\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right],\left[\frac{7\pi}{12},\pi\right]$;

(3)由题知 $f\left(x\right)=\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=\sqrt{3}\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$,

当 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 时, $-\frac{2\pi}{3}\le 2x-\frac{\pi}{6}\le\frac{5\pi}{6}$,

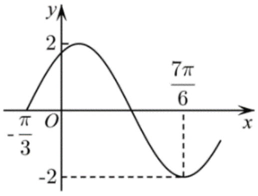
根据 $y=\cos x$ 图象性质可知:

$\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$,

$\therefore\sqrt{3}\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{3}{2},\sqrt{3}\right]$,

故 $f\left(x\right)_{\min}=-\frac{3}{2}$, $f\left(x\right)_{\max}=\sqrt{3}$.

例 3．已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示.



(1)求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2)将 $f(x)$ 图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$（纵坐标不变），得到函数 $y=g(x)$ 的图象，若方程 $g(x)-m=0$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上有两个不等的实数根，且 $x_1<x_2$，

①求 m 的取值范围;

②求 $\tan(x_1+x_2)$.

解(1)

根据函数图像得： $A=2$， $\frac{3}{4}T=\frac{7}{6}\pi-(-\frac{\pi}{3})=\frac{3}{2}\pi$，

所以 $T=2\pi$， 所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=1$， 所以 $f(x)=2\sin(x+\varphi)$，

因为函数图像过点 $\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$， 所以 $f(-\frac{\pi}{3})=2\sin(-\frac{\pi}{3}+\varphi)=0$， 所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，

所以 $f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$.

(2)

根据题意，所以 $g(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，

当 $x\in[0,\frac{\pi}{12})$ 时， $f(x)$ 单调递增，当 $x\in[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}]$ 时， $f(x)$ 单调递减，

因为 $g(0)=\sqrt{3}$， $g(\frac{\pi}{2})=-\sqrt{3}$， $g(\frac{\pi}{12})=2$，

所以若 $g(x)-m=0$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上有两个不等的实数根，则 $m\in\left[\sqrt{3},2\right)$，

因为函数 $g(x)$ 关于直线 $x=\frac{\pi}{12}$ 对称，所以 $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\pi}{12}$，

所以 $x_1+x_2=\frac{\pi}{6}$， 所以 $\tan(x_1+x_2)=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

江苏省仪征中学 2022-2023 学年度第一学期高一数学期末复习作业

三角函数复习（2）

研制人：王桂芳　　　审核人：邓迎春

班级：______姓名：______________学号：_________授课日期：

1．已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right)$ 上单调，且对任意实数 x 均有 $f\left(\frac{7\pi}{6}\right)\le f(x)\le f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 成立，则 $\varphi=$（　）

A． $\frac{\pi}{12}$　　B． $\frac{\pi}{6}$　　C． $\frac{\pi}{4}$　　D． $\frac{\pi}{3}$

【答案】D

2．已知函数 $f(x)=2\sin\left(2x+\varphi-\frac{3\pi}{4}\right)\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 是奇函数，为了得到函数 $y=f(x)$ 的图象，可把函数 $y=2\cos\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)$ 的图象（　）

A．向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度　　B．向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

C．向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度　　D．向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

【答案】D

3．函数 $f(x)=\tan(\omega x+\varphi)\left(0<|\varphi|<\frac{\pi}{2},\omega>0\right)$ 某相邻两支图象与坐标轴分别交于点 $A\left(\frac{\pi}{6},0\right)$， $B\left(\frac{2\pi}{3},0\right)$，则方程 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right),x\in[0,\pi]$ 所有解的和为（　）

A． $\frac{5\pi}{12}$　　B． $\frac{5\pi}{6}$　　C． $\frac{\pi}{2}$　　D． π

【答案】B

【分析】根据正切函数的周期性，结合同角三角函数关系式，特殊角的三角函数值进行求解即可.

【详解】设函数 $f(x)=\tan(\omega x+\varphi)\left(0<|\varphi|<\frac{\pi}{2},\omega>0\right)$ 的最小正周期为 T，

因为 $\omega>0$，所以由题意可知 $T=\frac{\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\Rightarrow\omega=2$，

又因为 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=0\Rightarrow\tan(2\times\frac{\pi}{6}+\varphi)=0\Rightarrow\varphi=k\pi-\frac{\pi}{3}(k\in Z)$，

又因为 $0<|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $k=0$，即 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$，因此 $f(x)=\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，

由 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow\frac{\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\left[\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-1\right]=0\Rightarrow\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$，或 $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=1$，

当 $x\in[0,\pi]$ 时， $2x-\frac{\pi}{3}\in[-\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}]$，

当 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$ 时， $2x-\frac{\pi}{3}=0,\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}$，

当 $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=1$ 时， $2x-\frac{\pi}{3}=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}$，

所以 $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$，

故选：B

4．已知函数 $f\left(x\right)=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1$，下列结论中正确的是（　　）

A．函数 $f\left(x\right)$ 的周期是 π

B．函数 $f\left(x\right)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{8}$ 对称

C．函数 $f\left(x\right)$ 的最小值是 -2

D．函数 $f\left(x\right)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{7\pi}{8},0\right)$ 对称

【答案】AC

5．已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(0<\omega<10)$，且 $f\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=-f(x)$，则（　　）

A．$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$

B．$f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称

C．若 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=0\left(x_1\neq x_2\right)$，则 x_1-x_2 是 $\frac{2\pi}{5}$ 的整数倍

D．$f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ 上不单调

【答案】AD

【分析】对于 A，令 $x=\frac{\pi}{6}$ 即可判断；

对于 B，可先由 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$ 求出 ω 的值，再令 $\omega x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in\mathrm{Z}\right)$ 求出对称轴方程即可判断；

对于 C，可根据 $\omega x+\frac{\pi}{6}=k\pi\left(k\in\mathrm{Z}\right)$ 分别求出 x_1 和 x_2 的值即可判断；

对于 D，直接求出函数的单调区间即可判断.

【详解】对于 A，令 $x=\frac{\pi}{6}$ 可得 $f\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=-f(\frac{\pi}{6})$，即 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$，所以 A 选项正确；

对于 B，因为 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$，所以 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}\right)=0$，即 $\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}=k\pi\left(k\in\mathrm{Z}\right)$，解得 $\omega=6k-1\left(k\in\mathrm{Z}\right)$，又因为 $0<\omega<10$，所以 $\omega=5$，所以 $f(x)=\sin\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)$.令 $5x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in\mathrm{Z}\right)$，解得 $x=\frac{k\pi}{5}+\frac{\pi}{15}\left(k\in\mathrm{Z}\right)$，所以 $f(x)$ 的图象的对称轴方程为 $x=\frac{k\pi}{5}+\frac{\pi}{15}\left(k\in\mathrm{Z}\right)$，可知 B 选项错误；

对于 C，根据 $5x_1+\frac{\pi}{6}=k_1\pi\left(k\in\mathrm{Z}\right)$ 解得 $x_1=\frac{k_1\pi}{5}-\frac{\pi}{30}\left(k_1\in\mathrm{Z}\right)$，同理可得 $x_2=\frac{k_2\pi}{5}-\frac{\pi}{30}\left(k_2\in\mathrm{Z}\right)$，又因为 $x_1\neq x_2$ 所以 $k_1\neq k_2$，所以 $x_1-x_2=\frac{\pi}{5}\left(k_1-k_2\right)$，因为 $k_1-k_2\in\mathrm{Z}$ 且 $k_1-k_2\neq 0$，可知 x_1-x_2 是 $\frac{\pi}{5}$ 的整数倍，所以 C 选项错误；

对于 D，令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leq 5x+\frac{\pi}{6}\leq\frac{\pi}{2}+2k\pi\left(k\in\mathrm{Z}\right)$，解得 $-\frac{2\pi}{15}+\frac{2k\pi}{5}\leq x\leq\frac{\pi}{15}+\frac{2k\pi}{5}\left(k\in\mathrm{Z}\right)$，所以函数 $f(x)=\sin\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{2\pi}{15}+\frac{2k\pi}{5},\frac{\pi}{15}+\frac{2k\pi}{5}\right]\left(k\in\mathrm{Z}\right)$，令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leq 5x+\frac{\pi}{6}\leq\frac{3\pi}{2}+2k\pi\left(k\in\mathrm{Z}\right)$，解得

$\frac{\pi}{15}+\frac{2k\pi}{5}\le x\le\frac{4\pi}{15}+\frac{2k\pi}{5}(k\in Z)$，所以函数 $f(x)=\sin\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{15}+\frac{2k\pi}{5},\frac{4\pi}{15}+\frac{2k\pi}{5}\right](k\in Z)$，可得函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ 上不单调，所以 D 选项正确.

6．函数 $f(x)=-2\tan^2 x+5\tan x-2$，$x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 的值域为______.

【答案】$[-9,1]$

7．设 $f(n)=\cos\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2022)=$__________.

【答案】$-\sqrt{2}$

【分析】确定 $f(n)$ 的周期为 4，且 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=0$，计算得到答案.

【详解】 $f(1)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$， $f(2)=\cos(\frac{2\pi}{2}+\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$， $f(3)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$f(4)=\cos\left(\frac{4\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$， $f(5)=\cos\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$f(n+4)=\cos\left(2\pi+\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=f(n)$， $f(n)$ 的周期为 4，

且 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=0$，

所以 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2022)=f(1)+f(2)=-\sqrt{2}$.

故答案为：$-\sqrt{2}$

8． 函数 $y=\cos(2x+\varphi)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后与函数 $y=\sin(2x+\frac{2\pi}{3})$ 的图象重合，则 $|\varphi|$ 的最小值为_____.

【答案】

$\frac{5\pi}{6}$

【解析】

【分析】

直接利用三角函数关系式的恒等变换，函数的图象的平移变换的应用求出结果.

本题考查的知识要点：三角函数关系式的恒等变换，函数的图象的平移变换，主要考查学生的运算能力和数学思维能力，属于基础题.

【解答】

解：函数 $y=\cos(2x+\varphi)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后，

得到 $f(x)=\cos(2x-\pi+\varphi)=-\cos(2x+\varphi)=\sin(2x+\varphi+\frac{3\pi}{2})$ 的图象.

因为 $f(x)$ 的图象与函数 $y=\sin(2x+\frac{2\pi}{3})$ 的图象重合，

所以$\varphi+\frac{3\pi}{2}=2k\pi+\frac{2\pi}{3}$，整理得$\varphi=2k\pi-\frac{5\pi}{6}$.

当$k=0$时，$\varphi=-\frac{5\pi}{6}$;当$k=1$时，$\varphi=\frac{7\pi}{6}$,

所以$|\varphi|$的最小值为$\frac{5\pi}{6}$.

9．已知函数 $f(x)=\sqrt{1-\cos x}+\sqrt{1+\cos x}$ ，则下列结论正确的有________.

① $f(x)$ 是周期函数，且最小正周期为2π；

② $f(x)$ 的值域为$[\sqrt{2},2]$；

③ $f(x)$ 在区间$[k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上为减函数；

④ $f(x)$ 的图象的对称轴为 $x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

【答案】②③

【分析】现将函数 $f(x)$ 的解析式进行化简变形，利用三角函数的周期性即可判断①；

利用正弦函数的有界性可判断②；利用正弦函数的单调性可判断③；利用正弦函数的对称轴可判断④.

【详解】$\left[f\left(x\right)\right]^2=(\sqrt{1-\cos x}+\sqrt{1+\cos x})^2=2+2\sqrt{1-\cos^2 x}=2+2\left|\sin x\right|$，

$\because f\left(x\right)\geq 0$， $\therefore f\left(x\right)=\sqrt{2+2\left|\sin x\right|}$，

易知 $f(x)$ 的最小正周期为π，故①错误；$\left|\sin x\right|\in\left[0,1\right]$，$2+2\left|\sin x\right|\in\left[2,4\right]$，$\sqrt{2+2\left|\sin x\right|}\in\left[\sqrt{2},2\right]$，②正确；当$x\in[-\pi,0]$时， $f\left(x\right)=\sqrt{2-2\sin x}$，单调递减区间为$[-\frac{\pi}{2},0]$，再由周期为$\pi$，故③正确；直线$x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$也是 $f(x)$ 图象的对称轴，故④错误.

故答案为：②③

10．已知函数 $f\left(x\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}x\right)$.

(1)求函数 $f\left(x\right)$ 图象的对称轴；

(2)将函数 $f\left(x\right)$ 图象上所有的点向左平移 1 个单位长度，得到函数 $g\left(x\right)$ 的图象，若函数 $y=g\left(x\right)+k$ 在$\left(-2,4\right)$上有两个零点，求实数 k 的取值范围.

【答案】(1) $x=1+4k$， $k\in\mathbf{Z}$；

(2) $\left(-2,0\right)$.

【分析】（1）求出 $f\left(x\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{4}\right)$，解方程$\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$， $k\in\mathbf{Z}$，即得解；

（2）求出 $g\left(x\right)=2\cos\frac{\pi}{4}x$，即函数 $y=g\left(x\right)$ 的图象与直线 $y=-k$ 在$\left(-2,4\right)$上有两个交点，再利用数形结合分析求

解.

（1）

解：因为 $f\left(x\right)=2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{4}x\right)$，所以 $f\left(x\right)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

令 $\dfrac{\pi}{4}x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$， $k\in\mathbf{Z}$，解得 $x=1+4k$， $k\in\mathbf{Z}$，

所以函数 $f\left(x\right)$ 图象的对称轴为直线 $x=1+4k$， $k\in\mathbf{Z}$.

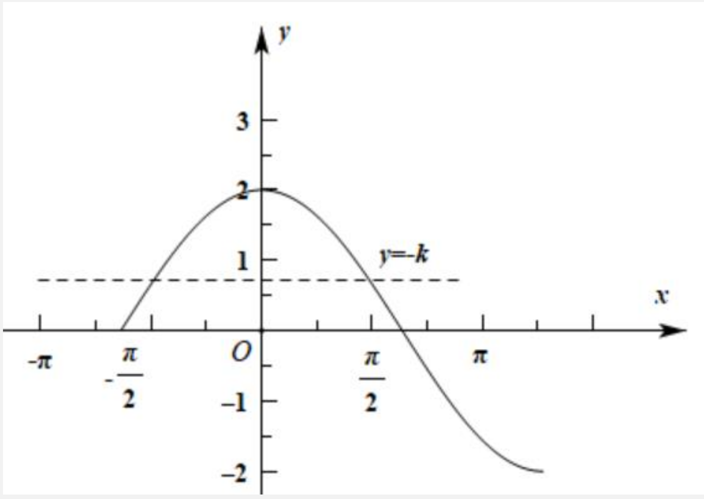
（2）

解：依题意，将函数 $f\left(x\right)$ 的图象向左平移 1 个单位长度后，得到的图象对应函数的解析式为

$g\left(x\right)=2\sin\left[\dfrac{\pi}{4}\left(x+1\right)+\dfrac{\pi}{4}\right]=2\cos\dfrac{\pi}{4}x$.

函数 $y=g\left(x\right)+k$ 在 $\left(-2,4\right)$ 上有两个零点，

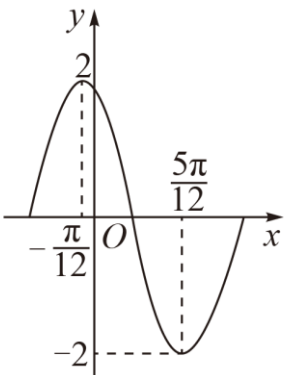
即函数 $y=g\left(x\right)$ 的图象与直线 $y=-k$ 在 $\left(-2,4\right)$ 上有两个交点，如图所示，



所以 $0<-k<2$，即 $-2<k<0$，

所以实数 k 的取值范围为 $\left(-2,0\right)$.

11．已知函数 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(A>0,\omega>0,0<\varphi<\pi\right)$ 在一个周期内的图象如图所示.



(1)求函数 $f\left(x\right)$ 的解析式和最小正周期；

(2)求函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right]$ 上的最值及对应的 x 的取值；

(3)当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，写出函数 $f(x)$ 的单调区间.

【答案】(1) $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$，π.

(2)答案见解析

(3)减区间$\left[0,\frac{5\pi}{12}\right]$；增区间$\left[\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$

【分析】(1）由函数的图象的最值点坐标求出 A，由周期求出ω，由五点法作图求出φ的值，可得函数的解析式.

（2）$x\in\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]\Rightarrow 2x+\frac{2\pi}{3}\in\left[\frac{2\pi}{3},2\pi\right]$，根据正弦函数性质求得函数 $f(x)$ 在区间$\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$上的最值及对应的 x 的取值；

（3）当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，分两种情况讨论，可写出函数 $f(x)$ 的单调区间.

【详解】(1）由函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 在一个周期内的图象可得：

$A=2,\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega}=\frac{5\pi}{12}-\left(-\frac{\pi}{12}\right)\Rightarrow\omega=2$,

再根据五点法作图可得

$2\cdot\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\varphi=\frac{\pi}{2},\therefore\varphi=\frac{2\pi}{3},\therefore f(x)=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right).T=\frac{2\pi}{2}=\pi$,

（2） $x\in\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]\Rightarrow 2x+\frac{2\pi}{3}\in\left[\frac{2\pi}{3},2\pi\right]\Rightarrow\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)\in\left[-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\Rightarrow f(x)\in\left[-2,\sqrt{3}\right]$,

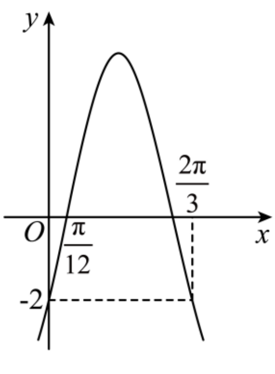
$x=0$ 时，函数 $f(x)$ 在区间$\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$上的最大值为$\sqrt{3}$

$x=\frac{5\pi}{12}$时，函数 $f(x)$ 在区间$\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$上的最小值为$-2$

（3） $x\in\left[0,\frac{5\pi}{12}\right]\Rightarrow 2x+\frac{2\pi}{3}\in\left[\frac{2\pi}{3},\frac{3\pi}{2}\right]$，故函数 $f(x)$ 的单调减区间是$\left[0,\frac{5\pi}{12}\right]$；

$x\in\left[\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow 2x+\frac{2\pi}{3}\in\left[\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{3}\right]$，故函数 $f(x)$ 的单调增区间是$\left[\frac{5\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$；

12．已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示.



(1)求 $f(x)$ 的解析式；

(2)若 $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$，关于 x 的方程 $\left[f\left(x\right)\right]^2-mf\left(x\right)+1=0$ 恰有两个实根，求 m 的取值范围.

【答案】(1) $f\left(x\right)=4\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$;

(2) $m\in\left[-\frac{5}{2},-2\right)\cup\left(2,\frac{5}{2}\right)\cup\left\{\frac{17}{4}\right\}$

【分析】（1）由图象确定函数周期，由此求 ω，代入特殊点坐标求求出 A,φ，即可求得解析式;

（2）令 $t=f(x)$，根据一元二次方程的根于系数关系研究方程 $t^2-mt+1=0$ 的解的个数及其范围，结合函数 $f\left(x\right)$ 图象，求出 m 的取值范围.

【详解】（1）观察图象可得 $x=\frac{\pi}{3}$ 为函数 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$，的对称轴，其中 $A>0,\omega>0,\left|\varphi\right|<\frac{\pi}{2}$，

所以函数 $f\left(x\right)$ 的周期 $T=4\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\right)=\pi$，又 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，所以 $\omega=2$，

因为 $\left(\frac{\pi}{12},0\right)$，$\left(0,-2\right)$ 在函数 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$ 的图象上，

所以 $A\sin\varphi=-2$①，$A\sin\left(\frac{\pi}{12}\omega+\varphi\right)=0$②，

由②可得 $\frac{\pi}{12}\omega+\varphi=k\pi,k\in Z$，又 $\omega=2$，

所以 $\varphi=k\pi-\frac{\pi}{6},k\in Z$，因为 $\left|\varphi\right|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$，

将 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$ 代入①得，$A=4$，

所以 $f\left(x\right)=4\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，即函数 $f\left(x\right)$ 的解析式为 $f\left(x\right)=4\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$;

（2）由(1) 可得 $f\left(x\right)=4\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，则 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=4\sin\frac{\pi}{6}=2$

令 $t=f(x)$，$x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$，则方程 $\left[f\left(x\right)\right]^2-mf\left(x\right)+1=0$ 可化为 $t^2-mt+1=0$

方程 $t^2-mt+1=0$ 没有实数解，则 $m^2-4<0$，即 $-2<m<2$，此时方程 $\left[f\left(x\right)\right]^2-mf\left(x\right)+1=0$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上无解，与条件矛盾，

若方程 $t^2-mt+1=0$ 有且只有一个解，则 $m^2-4=0$，所以 $m=\pm2$，

当 $m=2$ 时，方程 $t^2-mt+1=0$ 的解为 $t=1$，而 $f(x)=1$ 有且只有一解，与已知矛盾，

当 $m=-2$ 时，方程 $t^2-mt+1=0$ 的解为 $t=-1$，而 $f(x)=-1$ 有且只有一解，与已知矛盾，

当 $m>2$ 时，方程 $t^2-mt+1=0$ 有两个解，设其解为 t_1,t_2，则 $t_1+t_2=m$，$t_1\cdot t_2=1$，

故 $0<t_1<1<\frac{m}{2}<t_2$，观察函数 $f\left(x\right)$ 图象可得，方程 $f\left(x\right)=t_1$ 有且只有一个实数解，

由已知方程 $\left[f\left(x\right)\right]^2-mf\left(x\right)+1=0$ 在 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$ 恰有两个实根，所以方程 $f\left(x\right)=t_2$，$t_2>1$ 有且只有一个实数解，观察函数 $f\left(x\right)$ 可得 $1<t_2<2$ 或 $t_2=4$，

所以$m=t_2+\frac{1}{t_2}$，其中$1<t_2<2$或$t_2=4$，又函数$y=x+\frac{1}{x}$在$(1,2)$上为增函数，所以$m\in\left(2,\frac{5}{2}\right)\cup\left\{\frac{17}{4}\right\}$，

当$m<-2$时，方程$t^2-mt+1=0$有两个解，设其解为t_3,t_4，$t_3<t_4$，则$t_3+t_4=m$，$t_3\cdot t_4=1$，

故$t_3<\frac{m}{2}<-1<t_4<0$，观察函数$f\left(x\right)$图象可得，方程$f\left(x\right)=t_4$有且只有一个实数解，

由已知方程$\left[f\left(x\right)\right]^2-mf\left(x\right)+1=0$在$\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$恰有两个实根，所以方程$f\left(x\right)=t_3$，$t_3<-1$有且只有一个实数解，观察函数$f\left(x\right)$可得$-2\le t_3<-1$，

所以$m=t_3+\frac{1}{t_3}$，其中$-2\le t_3<-1$，又函数$y=x+\frac{1}{x}$在$\left[-2,-1\right)$上为增函数，所以$m\in\left[-\frac{5}{2},-2\right)$，

综上：当$m\in\left[-\frac{5}{2},-2\right)\cup\left(2,\frac{5}{2}\right)\cup\left\{\frac{17}{4}\right\}$时，方程$\left[f\left(x\right)\right]^2-mf\left(x\right)+1=0$恰有两个实根.