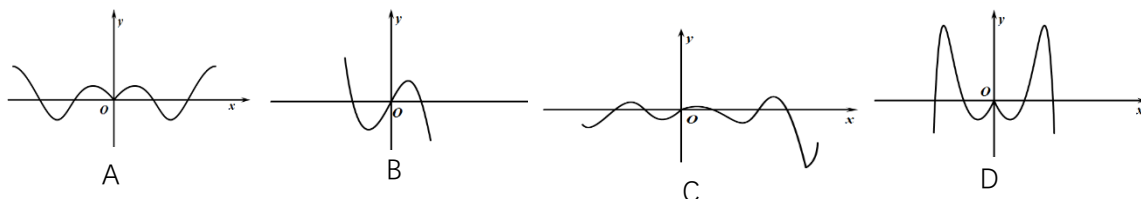


江苏省仪征中学 2022-2023 学年度第一学期期末模拟测试 3

高一年级数学试卷

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 \leq 0\}$, $B = \{0, 1\}$, 则集合 $A \cap B$ 中元素的个数是()
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
2. 函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x > 0 \\ x+3, & x \leq 0 \end{cases}$, 则 $f[f(-2)]$ 的值为()
 A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. 4
3. 已知 $a = \log_2 10.3$, $b = 0.3^{2^{-1}}$, $c = 2.1^{0.3}$, 则 a, b, c 的大小关系是()
 A. $b > c > a$ B. $c > a > b$ C. $b > a > c$ D. $c > b > a$
4. 对于全集 U , 命题甲“所有集合 A 都满足 $A \cup \complement_U A = U$ ”, 命题乙为命题甲的否定, 则命题甲、乙真假判断正确的是()
 A. 甲、乙都是真命题 B. 甲、乙都不是真命题
 C. 甲为真命题, 乙为假命题 D. 甲为假命题, 乙为真命题
5. 方程 $e^x + x - 2 = 0$ (其中 $e = 2.71828 \dots$) 的近似解所在的区间是()
 A. $(0, \frac{1}{2})$ B. $(\frac{1}{2}, 1)$ C. $(1, \frac{3}{2})$ D. $(\frac{3}{2}, 2)$
6. 2020 年 11 月 24 日凌晨 4 时 30 分, 我国在文昌航天发射场用长征五号遥五运载火箭把嫦娥五号探测器顺利地送入预定轨道, 开启我国首次外太空采样返回之旅. 据科学家们测算: 火箭的最大速度至少达 11.2 千米/秒时, 可将嫦娥五号探测器顺利送入外太空. 若火箭的最大速度 v (单位: 米/秒)、燃料的质量 M (单位: 吨) 和嫦娥五号探测器的质量 m (单位: 吨) 近似满足函数关系式 $v = 5600 \cdot \lg(1 + \frac{M}{m})$, 当燃料质量与嫦娥五号探测器质量的比值至少为() 时可顺利送入外太空.
 A. 9 B. 99 C. 999 D. 9999
7. 函数 $f(x) = \frac{x \sin x}{2 - \cos x}$ 的图象可能为()



8. 为了提高资源利用率, 全国掀起了垃圾分类的热潮, 垃圾分类已经成为了新时代的要求. 假设某地 2020 年全年用于垃圾分类的资金为 500 万元, 在此基础上, 每年投入的资金比上一年增长 20%, 则该市用于垃圾分类的资金开始不低于 1600 万元的年份是() (参考数据: $\lg 2 \approx 0.301$, $\lg 3 \approx 0.477$)

- A. 2025 年 B. 2026 年 C. 2027 年 D. 2028 年

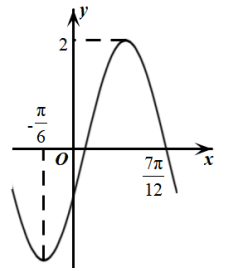
二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对得 5 分, 部分选对得 2 分, 不选或有错选的得 0 分.

9. 下列命题中正确的是()

- A. 若 $a < b < 0$, $c < d < 0$, 则 $ac > bd$ B. 若 $a > b$, 则 $ka > kb$
 C. 若 $a < b$, 则 $|a| < |b|$ D. 若 $a > b > 0$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

10. 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ (其中 $A > 0$, $\omega > 0$, $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则()

- A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期是 2π B. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{2\pi}{3}, 0)$ 对称
 C. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称
 D. 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后, 所得的函数图象关于 y 轴对称

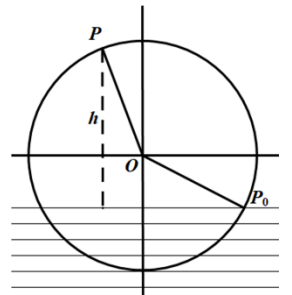


11. 若 $2^x = 3$, $3^y = 4$, 则下列说法正确的是()

- A. $xy = 2$ B. $x < \frac{3}{2}$ C. $x + y > 2\sqrt{2}$ D. $x > y$

12. 水车在古代是进行灌溉的工具, 是人类的一项古老的发明, 也是人类利用自然和改造自然的象征. 如图, 一个半径为 6 米的水车逆时针匀速转动, 水轮圆心 O 距离水面 3 米, 已知水轮每分钟转动 1 圈, 如果当水轮上一点 P 从水中浮现时(图中点 P_0)开始计时, 经过 t 秒后, 水车旋转到 P 点, 则下列说法正确的是()

- A. 在转动一圈内, 点 P 的高度在水面 3 米以上的持续时间为 30 秒
 B. 当 $t \in [0, 15]$ 时, 点 P 距水面的最大距离为 6 米
 C. 当 $t = 10$ 秒时, $PP_0 = 6$ D. 若 P 第二次到达最高点大约需要时间为 80 秒



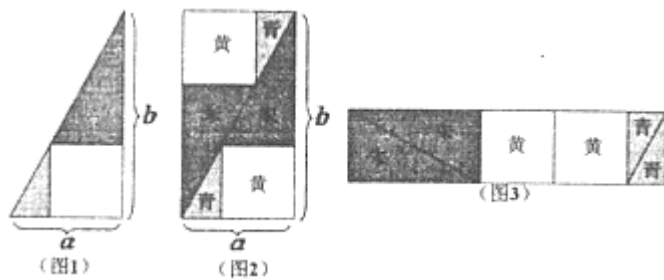
三、填空题: 每小题 5 分, 共 20 分. 其中第 16 题第一空 2 分, 第二空 3 分.

13. 命题 “ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + x + 1 \leq 0$ ” 的否定是_____.

14. 函数 $y = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 在 $[0, \frac{2\pi}{3}]$ 上的值域为_____.

15. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 对任意的实数 x , 有 $f(1-x) = f(1+x)$, 当 $x \leq 1$ 时, $f(x) = e^x + x$, 则不等式 $f(2x-1) \geq f(x+1)$ 的解集为_____.

16. “勾股容方”问题出自我国汉代数学名著《九章算术》，该问题可以被描述为：“设一直角三角形(如图1)的两直角边长分别为 a 和 b ，求与该直角三角形具有公共直角的内接正方形的边长”，公元 263 年，数学家刘徽为《九章算术》作注，在注中他利用出入相补原理给出了上述问题如图 2 和图 3 所示的解答，则图 1 中与直角三角形具有公共直角的内接正方形的边长为_____，当内接正方形的面积为 1 时，则图 3 中两个标有“朱”的三角形和两个标有“青”的三角形的面积总和的最小值为_____.



四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分) 求下列各式的值.

(1) $e^{\ln 2} + \pi^0 + 0.125^{\frac{2}{3}} - \log_3 27$; (2) $\cos \frac{\pi}{3} - \sin^2 \frac{5\pi}{4} \cdot \sin(-\frac{\pi}{2}) - 3 \tan^2 \frac{13\pi}{6}$.

18. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \lg \frac{x-3}{x-1}$ 定义域为 A ，集 $B = \{x | x^2 - 2mx + m^2 - 4 \leq 0\}$.

(1) 求集合 A , B ; (2) 若 $x \in B$ 是 $x \in A$ 成立的充分不必要条件，求实数 m 的取值范围.

19. (本小题满分 10 分)

经调查，某产品在过去两周内的日销售量(单位：千克)与日销售单价(单位：元)均为时间 t (天)的函数。其中日销售量为时间 t 的一次函数，且 $t=1$ 时，日销售量为 34 千克， $t=10$ 时，日

销售量为 25 千克。日销售单价满足函数 $f(t) = \begin{cases} 25 - \frac{25}{t+1}, & 1 \leq t < 8 \text{ 且 } t \in \mathbf{N} \\ 14 + t, & 8 \leq t \leq 14 \text{ 且 } t \in \mathbf{N} \end{cases}$.

(1) 写出该商品日销售额 y 关于时间 t 的函数(日销售额 = 日销售量 × 销售单价);

(2) 求过去两周内该商品日销售额的最大值.

20. (本小题满分 12 分)

某同学用“五点法”画函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi) + B$ (其中 $A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ 在某一个周期内的图象时, 列表并填入部分数据, 如表:

$\omega x + \varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x			$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$
$A\sin(\omega x + \varphi) + B$		3		-1	

(1) 请根据上表中的部分数据, 求出函数 $f(x)$ 的解析式; (2) 若定义在区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上的函数 $g(x) = af(x) + b$ 的最大值为 7, 最小值为 1, 求实数 a, b 的值.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^3 - 3x$.

- (1) 判断并证明函数 $f(x)$ 的奇偶性; (2) 用定义证明函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上为减函数;
 (3) 已知 $x \in [0, 2\pi]$, 且 $f(\sin x) = f(\cos x)$, 求 x 的值.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^2 - 2mx + m^2 + 6, g(x) = 2^x$.

- (1) 求 $g[f(m)]$ 的值;
 (2) 若方程 $g[f(x)] = 128$ 在区间 $[-1, 2]$ 上有唯一的解, 求实数 m 的取值范围;
 (3) 对任意 $m \in \mathbf{R}$, 若关于 x 的不等式 $f[g(x)] + f[g(-x)] \geq t[g(x) + g(-x)]$ 在 $x \in \mathbf{R}$ 上恒成立, 求实数 t 的取值范围.

期末试卷一答案

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 \leq 0\}$, $B = \{0, 1\}$, 则集合 $A \cap B$ 中元素的个数是(B)

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2. 函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x > 0 \\ x+3, & x \leq 0 \end{cases}$, 则 $f[f(-2)]$ 的值为(C)

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. 4

3. 已知 $a = \log_{2.1} 0.3$, $b = 0.3^{2.1}$, $c = 2.1^{0.3}$, 则 a, b, c 的大小关系是(D)

A. $b > c > a$ B. $c > a > b$ C. $b > a > c$ D. $c > b > a$

4. 对于全集 U , 命题甲“所有集合 A 都满足 $A \cup \complement_U A = U$ ”, 命题乙为命题甲的否定, 则命题甲、乙真假判断正确的是(C)

A. 甲、乙都是真命题 B. 甲、乙都不是真命题

C. 甲为真命题, 乙为假命题 D. 甲为假命题, 乙为真命题

5. 方程 $e^x + x - 2 = 0$ (其中 $e = 2.71828 \dots$) 的近似解所在的区间是(A)

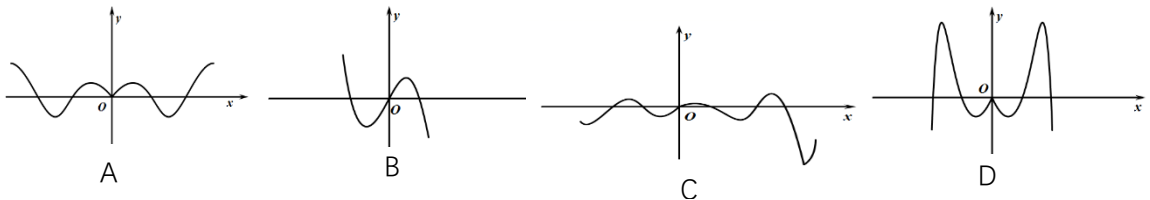
A. $(0, \frac{1}{2})$ B. $(\frac{1}{2}, 1)$ C. $(1, \frac{3}{2})$ D. $(\frac{3}{2}, 2)$

6. 2020 年 11 月 24 日凌晨 4 时 30 分, 我国在文昌航天发射场用长征五号遥五运载火箭把嫦娥五号探测器顺利地送入预定轨道, 开启我国首次外太空采样返回之旅. 据科学家们测算: 火箭的最大速度至少达 11.2 千米/秒时, 可将嫦娥五号探测器顺利送入外太空. 若火箭的最大速度 v (单位: 米/秒)、燃料的质量 M (单位: 吨) 和嫦娥五号探测器的质量 m (单位: 吨) 近似满足函数关系式 $v = 5600 \cdot \lg(1 + \frac{M}{m})$, 当燃料质量与嫦娥五号探测器质量的比值至少为(B)时可顺利送入外太空.

A. 9 B. 99 C. 999 D. 9999



7. 函数 $f(x) = \frac{x \sin x}{2 - \cos x}$ 的图象可能为(A)



8. 为了提高资源利用率, 全国掀起了垃圾分类的热潮, 垃圾分类已经成为了新时代的要

求. 假设某地 2020 年全年用于垃圾分类的资金为 500 万元, 在此基础上, 每年投入的资金比上一年增长 20%, 则该市用于垃圾分类的资金开始不低于 1600 万元的年份是(C)(参考数据: $\lg 2 \approx 0.301$, $\lg 3 \approx 0.477$)

- A. 2025 年 B. 2026 年 C. 2027 年
D. 2028 年

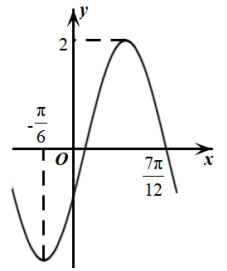
二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对得 5 分, 部分选对得 2 分, 不选或有错选的得 0 分.

9. 下列命题中正确的是(AD)

- A. 若 $a < b < 0$, $c < d < 0$, 则 $ac > bd$ B. 若 $a > b$, 则 $ka > kb$
C. 若 $a < b$, 则 $|a| < |b|$ D. 若 $a > b > 0$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

10. 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ (其中 $A > 0$, $\omega > 0$, $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则(CD)

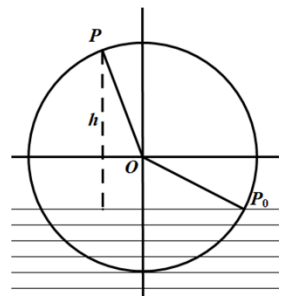
- A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期是 2π
B. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{2\pi}{3}, 0)$ 对称
C. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称
D. 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后, 所得的函数图象关于 y 轴对称



11. 若 $2^x = 3$, $3^y = 4$, 则下列说法正确的是(ACD)

- A. $xy = 2$ B. $x < \frac{3}{2}$ C. $x + y > 2\sqrt{2}$ D. $x > y$

12. 水车在古代是进行灌溉的工具, 是人类的一项古老的发明, 也是人类利用自然和改造自然的象征. 如图, 一个半径为 6 米的水车逆时针匀速转动, 水轮圆心 O 距离水面 3 米, 已知水轮每分钟转动 1 圈, 如果当水轮上一点 P 从水中浮现时(图中点 P_0)开始计时, 经过 t 秒后, 水车旋转到 P 点, 则下列说法正确的是



(ACD)

- A. 在转动一圈内, 点 P 的高度在水面 3 米以上的持续时间为 30 秒
B. 当 $t \in [0, 15]$ 时, 点 P 距水面的最大距离为 6 米
C. 当 $t = 10$ 秒时, $PP_0 = 6$
D. 若 P 第二次到达最高点大约需要时间为 80 秒

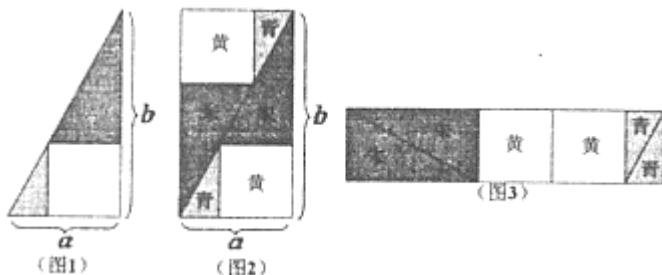
三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 其中第 16 题第一空 2 分, 第二空 3 分.

13. 命题 “ $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + x + 1 \leq 0$ ” 的否定是 $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + x + 1 > 0$.

14. 函数 $y=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 在 $[0, \frac{2\pi}{3}]$ 上的值域为 $[-\sqrt{3}, 2]$.

15. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 对任意的实数 x , 有 $f(1-x)=f(1+x)$, 当 $x \leq 1$ 时, $f(x)=e^x+x$, 则不等式 $f(2x-1) \geq f(x+1)$ 的解集为 $[\frac{2}{3}, 2]$.

16. “勾股容方”问题出自我国汉代数学名著《九章算术》，该问题可以被描述为：“设一直角三角形(如图1)的两直角边长分别为 a 和 b , 求与该直角三角形具有公共直角的内接正方形的边长”，公元 263 年，数学家刘徽为《九章算术》作注，在注中他利用出入相补原理给出了上述问题如图 2 和图 3 所示的解答，则图 1 中与直角三角形具有公共直角的内接正方形的边长为 $\frac{ab}{a+b}$ ，当内接正方形的面积为 1 时，则图 3 中



两个标有“朱”的三角形和两个标有“青”的三角形的面积总和的最小值为 2 .

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

求下列各式的值.

(1) $e^{\ln 2} + \pi^0 + 0.125^{\frac{2}{3}} - \log_3 27$;

(2) $\cos \frac{\pi}{3} - \sin^2 \frac{5\pi}{4} \cdot \sin(-\frac{\pi}{2}) - 3 \tan^2 \frac{13\pi}{6}$.

解：(1) $e^{\ln 2} + \pi^0 + 0.125^{\frac{2}{3}} - \log_3 27 = 2 + 1 + \frac{1}{4} - 3 = \frac{1}{4}$.

(2) $\cos \frac{\pi}{3} - \sin^2 \frac{5\pi}{4} \sin(-\frac{\pi}{2}) - 3 \tan^2 \frac{13\pi}{6} = \frac{1}{2} + \sin^2 \frac{5\pi}{4} \sin \frac{\pi}{2} - 3 \tan^2 \frac{13\pi}{6}$
 $= \frac{1}{2} + \sin^2(\pi + \frac{\pi}{4}) - 3 \tan^2(2\pi + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot 3 = 1 - 1 = 0$.

18. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \lg \frac{x-3}{x-1}$ 定义域为 A , 集 $B = \{x | x^2 - 2mx + m^2 - 4 \leq 0\}$.

(1) 求集合 A, B ;

(2) 若 $x \in B$ 是 $x \in A$ 成立的充分不必要条件, 求实数 m 的取值范围.

解：(1) 由题意知： $\frac{x-3}{x-1} > 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-1) > 0$, 解得 $x > 3$ 或 $x < 1$. 所以集合 $A = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

对于集合 B 满足： $x^2 - 2mx + m^2 - 4 = (x-m+2)(x-m-2) \leq 0$.

又 $m-2 < m+2$, 所以 $B = [m-2, m+2]$.

(2) 若 $x \in B$ 是 $x \in A$ 的充分不必要条件, 则集合 B 是 A 的真子集,

由 (1) 知, 只需满足 $m+2 < 1$ 或 $m-2 > 3$ 即可, 解得 $m < -1$ 或 $m > 5$.

综上, 满足题意的 m 的取值范围是 $(-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$.

19. (本小题满分 10 分)

经调查, 某产品在过去两周内的日销售量(单位: 千克)与日销售单价(单位: 元)均为时间 t (天)的函数.

其中日销售量为时间 t 的一次函数, 且 $t=1$ 时, 日销售量为 34 千克, $t=10$ 时, 日销售量为

$$25 \text{ 千克. 日销售单价满足函数 } f(t) = \begin{cases} 25 - \frac{25}{t+1}, & 1 \leq t < 8 \text{ 且 } t \in \mathbf{N} \\ 14 + t, & 8 \leq t \leq 14 \text{ 且 } t \in \mathbf{N} \end{cases}.$$

(1) 写出该商品日销售额 y 关于时间 t 的函数(日销售额 = 日销售量 \times 销售单价);

(2) 求过去两周内该商品日销售额的最大值.

解: (1) 设日销售量 $g(t)$ (千克)关于时间 t (天)的函数为 $g(t) = kt + b$, 则 $\begin{cases} k + b = 34 \\ 10k + b = 25 \end{cases}$,

$$\text{解得 } k = -1, b = 35, \text{ 所以 } g(t) = 35 - t, \text{ 所以 } y = \begin{cases} (25 - \frac{25}{t+1})(35 - t), & 1 \leq t < 8 \text{ 且 } t \in \mathbf{N} \\ (14 + t)(35 - t), & 8 \leq t \leq 14 \text{ 且 } t \in \mathbf{N} \end{cases}.$$

$$(2) \text{ 当 } 1 \leq t < 8 \text{ 时, } y = 25[37 - (t+1) - \frac{36}{t+1}] \leq (37 - 2\sqrt{36}) \times 25 = 625,$$

当且仅当 $(t+1)^2 = 36$, 即 $t=5$ 时, 取等号.

当 $8 \leq t \leq 14$ 时, $y = -t^2 + 21t + 490$, 对称轴 $t = \frac{21}{2} = 10.5$, 故当 $t=10$ 或 $t=11$ 时, $y_{\max} = 600$,

因为 $625 > 600$, 所以 $t=5$ 时, $y_{\max} = 625$.

答: 第 5 天的销售额最大, 最大日销售额为 625 元.

20. (本小题满分 12 分)

某同学用“五点法”画函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi) + B$ (其中 $A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ 在某一个周期内的图象时, 列表并填入部分数据, 如表:

$\omega x + \varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x			$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$
$A\sin(\omega x + \varphi) + B$		3		-1	

(1) 请根据上表中的部分数据, 求出函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若定义在区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上的函数 $g(x) = af(x) + b$ 的最大值为 7, 最小值为 1, 求实数 a, b 的值.

解: (1) 由题, 函数 $f(x)$ 的周期 $T = 2 \times (\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}) = \pi$, 所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$,

$$\text{由 } \begin{cases} A + B = 3 \\ -A + B = -1 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} A = 2 \\ B = 1 \end{cases}, \text{ 故 } f(x) = 2\sin(2x + \varphi) + 1,$$

由表可知, $2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi = \pi$, 得 $\varphi = \frac{\pi}{3}$, 所以 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3}) + 1$.

(2) 由 (1) 可知 $g(x) = 2a\sin(2x + \frac{\pi}{3}) + a + b$, 由 $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, 得 $-\frac{\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{6}$,

所以 $-\frac{1}{2} \leq \sin(2x + \frac{\pi}{3}) \leq 1$;

当 $a > 0$ 时, $g(x)$ 的最大值是 $3a + b = 7$, 最小值是 $b = 1$, 解得 $a = 2, b = 1$;

当 $a < 0$ 时, $g(x)$ 的最大值是 $b = 7$, 最小值是 $3a + b = 1$, 解得 $a = -2, b = 7$.

综上, $a = 2, b = 1$; 或 $a = -2, b = 7$.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^3 - 3x$.

(1) 判断并证明函数 $f(x)$ 的奇偶性;

(2) 用定义证明函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上为减函数;

(3) 已知 $x \in [0, 2\pi]$, 且 $f(\sin x) = f(\cos x)$, 求 x 的值.

解: (1) 奇函数; 证明: 函数 $f(x) = x^3 - 3x$, 定义域 $x \in \mathbf{R}$, 关于原点对称,

又 $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -(x^3 - 3x) = -f(x)$, 故 $f(x)$ 为奇函数;

(2) 任取 $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$,

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - 3x_1 - (x_2^3 - 3x_2) = x_1^3 - x_2^3 - 3(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3),$$

因为 $0 \leq x_1 < 1 \Rightarrow x_1^2 < 1$, $0 < x_2 \leq 1 \Rightarrow x_2^2 \leq 1$, $0 \leq x_1x_2 < 1$, 所以 $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3 < 0$,

则 $f(x_1) - f(x_2) > 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, 所以 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上为减函数.

(3) $x \in [0, 2\pi]$, $-1 \leq \sin x \leq 1$, $-1 \leq \cos x \leq 1$,

又 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上为奇函数且 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 为减函数, 所以 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 也是减函数,

所以 $f(\sin x) = f(\cos x) \Rightarrow \sin x = \cos x$, 又 $x \in [0, 2\pi]$, 则 $x = \frac{\pi}{4}$ 或 $x = \frac{5\pi}{4}$.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^2 - 2mx + m^2 + 6$, $g(x) = 2^x$.

(1) 求 $g[f(m)]$ 的值;

(2) 若方程 $g[f(x)] = 128$ 在区间 $[-1, 2]$ 上有唯一的解, 求实数 m 的取值范围;

(3) 对任意 $m \in \mathbf{R}$, 若关于 x 的不等式 $f[g(x)] + f[g(-x)] \geq t[g(x) + g(-x)]$ 在 $x \in \mathbf{R}$ 上恒成立, 求实数 t 的取值范围.

解: (1) $\because f(x) = x^2 - 2mx + m^2 + 6 = (x - m)^2 + 6$, 则 $f(m) = 6$, 所以,

$$g(f(m)) = g(6) = 2^6 = 64;$$

$$(2) \text{ 由 } g(f(x)) = 128, \text{ 得 } 2^{x^2-2mx+m^2+6} = 2^7, \text{ 即 } x^2 - 2mx + m^2 + 6 = 7,$$

$$\text{即 } x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0, \text{ 因式分解得 } (x-m-1)(x-m+1) = 0, \text{ 解得 } x = m+1 \text{ 或 } x = m-1.$$

因为, 方程 $g(f(x)) = 128$ 在区间 $[-1, 2]$ 上有唯一的解,

$$\text{注意到 } m+1 > m-1, \text{ 所以 } \begin{cases} -1 \leq m-1 \leq 2 \\ m+1 > 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m-1 < -1 \\ -1 \leq m+1 \leq 2 \end{cases}, \text{ 解得 } 1 < m \leq 3 \text{ 或 } -2 \leq m < 0.$$

因此, m 的取值范围是 $[-2, 0) \cup (1, 3]$;

$$(3) \text{ 由 } f(g(x)) + f(g(-x)) \geq t[g(x) + g(-x)],$$

$$\text{得 } (2^x)^2 - 2m \cdot 2^x + m^2 + 6 + (2^{-x})^2 - 2m \cdot 2^{-x} + m^2 + 6 \geq t(2^x + 2^{-x}),$$

$$\text{整理得 } 2m^2 - 2(2^x + 2^{-x}) \cdot m + (2^x)^2 + (2^{-x})^2 + 12 - t(2^x + 2^{-x}) \geq 0 \text{ ①};$$

因为, ①式对任意 $m \in \mathbf{R}$ 恒成立,

$$\therefore \Delta = 4(2^x + 2^{-x})^2 - 8[(2^x)^2 + (2^{-x})^2 + 12 - t(2^x + 2^{-x})] \leq 0,$$

$$\text{整理得 } 2t(2^x + 2^{-x}) \leq (2^x)^2 + (2^{-x})^2 + 22, \text{ 即 } 2t \leq \frac{(2^x)^2 + (2^{-x})^2 + 22}{2^x + 2^{-x}} \text{ ②};$$

$$\text{记 } \varphi(x) = \frac{(2^x)^2 + (2^{-x})^2 + 22}{2^x + 2^{-x}}, \text{ 因为, ②式在 } x \in \mathbf{R} \text{ 上恒成立, } \therefore 2t \leq \varphi(x)_{\min}.$$

$$\text{令 } u = 2^x + 2^{-x}, \text{ 则 } u = 2^x + 2^{-x} = 2^x + \frac{1}{2^x} \geq 2\sqrt{2^x \times \frac{1}{2^x}} = 2, \text{ 当且仅当 } x = 0 \text{ 时, 等号成立, 则}$$

$$u \geq 2,$$

$$\text{则 } \varphi(x) = h(u) = \frac{u^2 + 20}{u} = u + \frac{20}{u} \geq 2\sqrt{u \cdot \frac{20}{u}} = 4\sqrt{5},$$

当且仅当 $u = 2\sqrt{5} \in [2, +\infty)$ 时, 等号成立, 所以 $\varphi(x)_{\min} = 4\sqrt{5}$, 所以 $2t \leq 4\sqrt{5}$, 即 $t \leq$

$$2\sqrt{5},$$

因此, 实数 t 的取值范围是 $(-\infty, 2\sqrt{5}]$.