江苏省仪征中学高一数学竞赛期中测试

时间：120 分钟　满分：120 + 60 分

一、填空题（本大题共 8 个小题，每小题 8 分，共 64 分.）

1. 已知集合 $A=\{1,2,3,\cdots,2020\},B=\{1,2,3,\cdots,2000\}$, 若集合 C 满足 $C\cap A=C$ 且 $C\cap B\neq\emptyset$, 则集合 C 的个数是__________.

2. 已知关于 x 的方程 $bx^2+|x|+b^2-9=0$ 有唯一实数解 $x=a$, 则 $a+b$ 的值为__________.

3. 计算 $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=$__________.

4. 已知函数 $f(x)$ 为单调函数, 且 $x\in(0,+\infty)$ 时, 均有 $f\left(f(x)+\frac{2}{x}\right)=1$, 则 $f(1)=$__________.

5. 设正实数 a,b,c 满足 $abc=10^{11}$, 且 $\lg a\cdot\lg(bc)+\lg b\cdot\lg(ca)+\lg c\cdot\lg(ab)=40$, 则 $\sqrt{\lg^2 a+\lg^2 b+\lg^2 c}=$__________.

6. 若实数 x,y 满足 $2^x+4x+12=\log_2(y-1)^3+3y+12=0$, 则 $x+y=$__________.

7. 给定实数集合 A,B, 定义计算 $A\otimes B=\{x\mid x=ab+a+b,a\in A,b\in B\}$. 设$A=\{0,2,4,\cdots,18\},B=\{98,99,100\}$, 则 $A\otimes B$ 中的所有元素之和为__________.

8. 已知关于 x 的方程 $mx^2-2(m-3)x+m-2=0$ 至少有一个整数根, 则负整数 $m=$__________.

二、**解答题**（本大题共 3 小题，共 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

9. （本题满分 16 分）
   已知 $f(x)=2mx^2-2mx-8x+9$, $g(x)=mx-m$, 对任意 $x\in\mathbf{R}, f(x)$ 与 $g(x)$ 至少有一个为正数, 求实数 m 的取值范围.

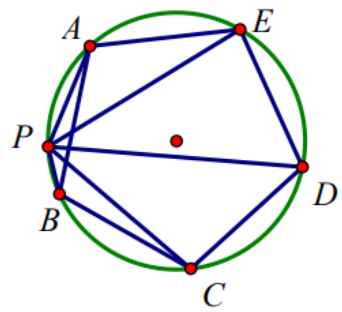
10. （本题满分 20 分）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1], f(0)=f(1)$,
    且对任意不同的 $x_1, x_2\in[0,1]$, 都有 $|f(x_1)-f(x_2)|<|x_1-x_2|$,
    求证: $|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{1}{2}$.

11. （本题满分 20 分）已知二次函数 $f(x)=x^2+ax+b(a,b\in\mathbf{R})$ 有两个不同的零点,
    若 $f(x^2+2x-1)=0$ 有四个不同的根 $x_1<x_2<x_3<x_4$, 且 $x_2-x_1=x_3-x_2=x_4-x_3$,
    求 $a-b$ 的取值范围.

三、加试部分（本大题共 2 小题，共 60 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

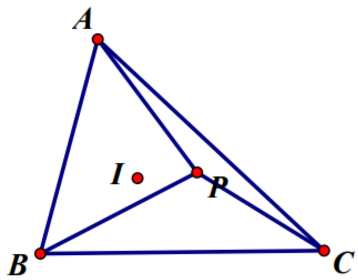
12. （本题满分 20 分）

已知圆内接正五边形 $ABCDE$, 若 P 为弧 AB 上一点, 求证: $PA+PB+PD=PC+PE$.



13.（本题满分 40 分）

I 为 $\triangle ABC$ 的内心, P 是 $\triangle ABC$ 内部的一点, 且满足 $\angle PBA+\angle PCA=\angle PBC+\angle PCB$
求证: $AP \geq AI$, 并说明等号成立的充要条件是 $P=I$.



高一数学竞赛期中测试

时间：120 分钟　满分：180 分

一、填空题（本大题共 8 个小题，每小题 8 分，共 64 分.）

13. 已知集合 $A=\{1,2,3,\cdots,2020\}, B=\{1,2,3,\cdots,2000\}$, 若集合 C 满足 $C\cap A=C$ 且 $C\cap B\neq\emptyset$, 则集合 C 的个数是__________.

解答:

依题意, 集合 C 不是集合 $\{2001,2002,\cdots,2020\}$ 的子集, 所以集合 C 的个数 是 $2^{2020}-2^{20}=2^{20}(2^{2000}-1)$.

14. 已知关于 x 的方程 $bx^2+|x|+b^2-9=0$ 有唯一实数解 $x=a$, 则 $a+b$ 的值为__________.

解答:

由于 $y=bx^2+|x|+b^2-9$ 为偶函数, 则 $a=0, b=3\Rightarrow a+b=3$.

15. 计算 $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=$__________.

解答:

设 $a=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}, b=\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$, 则 $ab=\sqrt[3]{7^2-(5\sqrt{2})^2}=-1$.

于是 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)\Rightarrow(a+b)^3+3(a+b)=14\Rightarrow a+b=2$.

16. 已知函数 $f(x)$ 为单调函数, 且 $x\in(0,+\infty)$ 时, 均有 $f\left(f(x)+\frac{2}{x}\right)=1$, 则 $f(1)=$__________.

解答:

由 $f(x)$ 为单调函数, 得 $f(x)+\frac{2}{x}=c>0$ 且 $f(c)=1\Rightarrow c-\frac{2}{c}=1\Rightarrow c=2$, 所以 $f(x)=2-\frac{2}{x}\Rightarrow$

$f(1)=0$.

17. 设正实数 a,b,c 满足 $abc=10^{11}$, 且 $\lg a\cdot\lg(bc)+\lg b\cdot\lg(ca)+\lg c\cdot\lg(ab)=40$, 则 $\sqrt{\lg^2 a+\lg^2 b+\lg^2 c}=$__________.

解答:

$$
\begin{aligned}
&\lg a+\lg b+\lg c=11, \lg a(\lg b+\lg c)+\lg b(\lg c+\lg a)+\lg c(\lg a+\lg b)\\
&=2(\lg a\lg b+\lg b\lg c+\lg c\lg a)=40, \text{所以} \lg^2 a+\lg^2 b+\lg^2 c=121-40=81\\
&\Rightarrow\sqrt{\lg^2 a+\lg^2 b+\lg^2 c}=9.
\end{aligned}
$$

18. 若实数 x,y 满足 $2^x+4x+12=\log_2(y-1)^3+3y+12=0$, 则 $x+y=$__________.

解答: $3\log_2(y-1)+3(y-1)+15=0\Rightarrow\log_2(y-1)+(y-1)+5=0$,

$4\cdot 2^{x-2}+4(x-2)+20=0\Rightarrow 2^{x-2}+(x-2)+5=0$,

结合单调性可得$(x-2)+(y-1)+5=0\Rightarrow x+y=-2$.

19. 给定实数集合 A,B, 定义计算 $A\otimes B=\{x\mid x=ab+a+b, a\in A, b\in B\}$. 设 $A=\{0,2,4,\cdots,18\}, B=\{98,99,100\}$, 则 $A\otimes B$ 中的所有元素之和为__________.

解答:

$x=ab+a+b=(a+1)(b+1)-1$, 则 $A\otimes B$ 中的所有元素之和 $=1\cdot 99-1+1\cdot 100-1+1\cdot 101-1+3\cdot 99-1+3\cdot 100-1+3\cdot 101-1+\cdots+19\cdot 99-1+19\cdot 100-1+19\cdot 101-1$
$=(1+3+\cdots+19)(99+100+101)-30=100\cdot 300-30=29970.$

20. 已知关于 x 的方程 $mx^2-2(m-3)x+m-2=0$ 至少有一个整数根,
则负整数 $m=$__________.

解答:
$\Delta=4(m-3)^2-4m(m-2)=4(9-4m)$, 则 $9-4m$ 为完全平方数,

令 $9-4m=(2n+1)^2\Rightarrow m=-(n^2+n-2)$, 此时 $x_{1,2}=\frac{m-3\pm(2n+1)}{m}=1-\frac{3\pm(2n+1)}{m}$,

于是 $2n+4\geqslant n^2+n-2\Rightarrow 1<n\leqslant 3$.
当 $n=2$ 时, $m=-4$; 当 $n=3$ 时, $m=-10$, 经检验符合题意.

三、**解答题**（本大题共 4 小题，共 86 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

21. （本题满分 16 分）
已知 $f(x)=2mx^2-2mx-8x+9$, $g(x)=mx-m$, 对任意 $x\in\mathbf{R}, f(x)$ 与 $g(x)$ 至少有一个为正数, 求实数 m 的取值范围.

解答:
显然 $m\leqslant 0$ 不合题意. $m>0$ 时, 由于 $x>1$ 时, $g(x)>0$, 只须 $x\leqslant 1$ 时, $f(x)>0$. 而 $f(1)=1>0, x\leqslant 0$ 时, $2mx^2-2mx-8x+9>0$ 显然成立;

$0<x<1$ 时, $2m(x^2-x)>8x-9\Rightarrow 2m<\frac{9-8x}{x-x^2}$

$t=9-8x\in(1,9), \frac{64t}{8(9-t)-(9-t)^2}=\frac{64}{10-\left(t+\frac{9}{t}\right)}\Rightarrow 2m<16\Rightarrow m<8$,

所以实数 m 的取值范围是 $(0,8)$.

22. （本题满分 20 分）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1], f(0)=f(1)$,
且对任意不同的 $x_1,x_2\in[0,1]$, 都有 $|f(x_1)-f(x_2)|<|x_1-x_2|$,
求证: $|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{1}{2}$.

解答:
不妨设 $x_1\leqslant x_2$, 若 $x_2-x_1\leqslant\frac{1}{2}$, 则 $|f(x_1)-f(x_2)|<|x_1-x_2|=x_2-x_1\leqslant\frac{1}{2}$;
若 $x_2-x_1>\frac{1}{2}$,
则 $|f(x_1)-f(x_2)|=|f(x_1)-f(0)+f(1)-f(x_2)|$
$\leqslant|f(x_1)-f(0)|+|f(1)-f(x_2)|<|x_1-0|+|1-x_2|=x_1+1-x_2=1-(x_2-x_1)<\frac{1}{2}$.
综上, 对任意不同的 $x_1,x_2\in[0,1]$, 都有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{1}{2}$.

23. （本题满分 20 分）已知二次函数 $f(x)=x^2+ax+b(a,b\in\mathbf{R})$ 有两个不同的零点, 若 $f(x^2+2x-1)=0$ 有四个不同的根 $x_1<x_2<x_3<x_4$, 且 $x_2-x_1=x_3-x_2=x_4-x_3$, 求 $a-b$ 的取值范围.

解答:

设 $x^2+ax+b=0$ 的两个根为 m,n，则 $m+n=-a, mn=b$.
$x^2+2x-1=m$ 的两个根为 $x_1,x_4, x^2+2x-1=n$ 的两个根为 x_2,x_3,
由 $|x_1-x_4|=3|x_2-x_3| \Rightarrow \sqrt{4m+8}=3\sqrt{4n+8} \Rightarrow m+2=9(n+2)$

$$\Rightarrow m=9n+16. \text{于是 } a-b=-(m+n)-mn=-10n-16-n(9n+16)$$
$$=-9n^2-26n-16=-9\left(n+\frac{13}{9}\right)^2+\frac{169}{9}-16=-9\left(n+\frac{13}{9}\right)^2+\frac{25}{9}$$

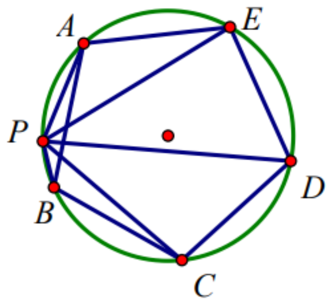
由于 $n>-2$，当 $n=-\frac{13}{9}$ 时，$a-b$ 取得最大值 $\frac{25}{9}$.

所以 $a-b$ 的取值范围是 $\left(-\infty,\frac{25}{9}\right]$.

24. （本题满分 20 分）

已知圆内接正五边形 $ABCDE$，若 P 为弧 AB 上一点，求证：$PA+PB+PD=PC+PE$.

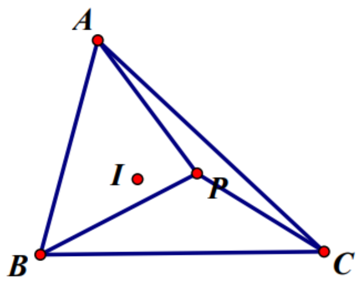
证明:



设五边形边长为 a，对角线长为 b，由托勒密定理
在四边形 $PBCD$ 中，$(PB+PD)a=PC\cdot b$
在四边形 $PAED$ 中，$(PA+PD)a=PE\cdot b$
在四边形 $PCDE$ 中，$PD\cdot b=(PC+PE)a$
在四边形 $PABC$ 中，$(PA+PB)b=PD\cdot a$,
上述式子相加，得：$(PA+PB+PD-PC-PE)(a-b)=0$
由 $a\neq b$ 得，$PA+PB+PD=PC+PE$

13.（本题满分 40 分）

I 为 $\triangle ABC$ 的内心，P 是 $\triangle ABC$ 内部的一点，且满足 $\angle PBA+\angle PCA=\angle PBC+\angle PCB$
求证：$AP\geq AI$，并说明等号成立的充要条件是 $P=I$.

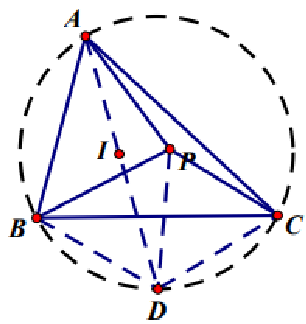


证明:
如图，延长 AI 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 D，则由内心性质知:

$$DB=DC=DI$$

由题意

$$\angle PBC+\angle PCB=\angle PBA+\angle PCA=\frac{1}{2}(\angle PBC+\angle PCB+\angle PBA+\angle PCA)$$
$$=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=90^\circ-\frac{1}{2}\angle BAC$$



所以 $\angle BPC=180^\circ-\angle PBC-\angle PCB=90^\circ+\frac{1}{2}\angle BAC=\angle BIC$
所以 B,P,I,C 四点共圆，即点 P 在以点 D 为圆心，DB 长为半径的圆上
所以 $DP=DI$
又因为 $AP+PD\geq AD \Leftrightarrow AP+PD\geq AI+ID \Leftrightarrow AP\geq AI$
当且仅当 A,P,D 三点共线且 C,I,P,B 四点共圆时等号成立，即 $P=I$.