**江苏省仪征中学2022-2023学年度第一学期高一数学周练（12）**

**班级 学号 姓名 评价 2022.12.24**

一、单选题（本大题共**8**小题，共**40.0**分。在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1.命题“$∀x>1,x^{2}−x>0$”的否定是(    ) 故选*C*．

A. $∃x\leq 1,x^{2}−x>0$；B. $∀x>1,x^{2}−x\leq 0$；C. $∃x>1,x^{2}−x\leq 0$；D. $∀x\leq 1,x^{2}−x>0$

2.集合$A=\left\{0,1,2,4,8\right\}$，$B=\left\{x\left|2^{x}\in A\right.\right\}$，将集合$A$，$B$分别用如图中的两个圆表示，则圆中阴影部分表示的集合中元素个数恰好为$2$的是(    )

A. B. C. D.

解：集合$A=\left\{0,1,2,4,8\right\}$，$B=\left\{x\left|2^{x}\in A\right.\right\}=\{0,1,2,3\}$，$A∪B=\{0,1,2,3,4,8\}$，$A$中阴影部分表示的集合为$A∩B$，即$\{0,1,2\}$，故*A*错误$;B$中阴影部分表示的集合为属于$A$但不属于$B$的元素构成，即$\{4,8\}$，故*B*正确；$C$中阴影部分表示的集合为属于$B$但不属于$A$的元素构成，即$\{3\}$，故*C*错误；$D$中阴影部分表示的集合为属于$A∪B$但不属于$A∩B$的元素构成，即$\{3,4,8\}$，故*D*错误．

3.已知函数$y=a^{x+3}+3(a>0$，且$a\ne 1)$的图象恒过点$P$，若角$α$的终边经过点$P$，则$cosα=$(    )

A. $\frac{3}{5}$ B. $−\frac{3}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $−\frac{4}{5}$

解：令$x+3=0$，求得$x=−3$，$y=4$，函数$y=a^{x+3}+3(a>0$，且$a\ne 1)$的图象恒过点$P(−3,4)$，
角$α$的终边经过点$P$，则$cosα=\frac{−3}{\sqrt{9+16}}=−\frac{3}{5}$，故选：$B$．

4.已知函数$f(x)$为$R$上的偶函数，对任意$x\_{1}$，$x\_{2}\in (−\infty ,0)$，均有$(x\_{1}−x\_{2})[f(x\_{1})−f(x\_{2})]<0$成立，若$a=f(\sqrt{2})$，$b=f(3^{\frac{1}{3}})$，$c=f(−log\_{2}5)$，则$a$，$b$，$c$的大小关系是(    )

A. $c<b<a$ B. $b<a<c$ C. $a<b<c$ D. $a<c<b$

解：对任意$x\_{1}$，$x\_{2}\in (−\infty ,0)$，均有$(x\_{1}−x\_{2})[f(x\_{1})−f(x\_{2})]<0$，即此时函数$f(x)$为减函数，
$∵f(x)$是偶函数，$∴$当$x>0$时，$f(x)$为增函数，$(\sqrt{2})^{6}=8$，$(3^{\frac{1}{3}})^{6}=9$，$2<log\_{2}5<3$
$(−log\_{2}5)^{6}>9$，则$0<(\sqrt{2})^{6}<(3^{\frac{1}{3}})^{6}<(−log\_{2}5)^{6}$即$a<b<c$，故选：$C$．

5.荀子$《$劝学$》$中说：“不积跬步，无以至千里；不积小流，无以成江海．”所以说学习是日积月累的过程，每天进步一点点，前进不止一小点．我们可以把$(1+1\%)^{365}$看作是每天的“进步”率都是$1\%$，一年后是$1.01^{365}≈37.7834$；而把$(1−1\%)^{365}$看作是每天“退步”率都是$1\%$，一年后是$0.99^{365}≈0.0255.$若“进步”的值是“退步”的值的$100$倍，大约经过$($参考数据：$lg 101≈2.0043$，$lg 99≈1.9956)$天．(    )

A. $200$天 B. $210$天 C. $220$天 D. $230$天

解：设经过$x$天“进步”的值是“退步”的值的$100$倍，则$100×0.99^{x}=1.01^{x}$即$(\frac{1.01}{0.99})^{x}=100$，$∴x=log\_{\frac{1.01}{0.99}}100=\frac{lg 100}{lg \frac{1.01}{0.99}}=\frac{lg 100}{lg \frac{101}{99}}=\frac{2}{lg 101−lg 99}≈\frac{2}{2.0043−1.9956}=\frac{2}{0.0087}≈230$．故选*D*．

6.设$a>0$，$b>0$，且不等式$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{k}{a+b}\geq 0$恒成立，则实数$k$的取值范围是(    )

A.  $k\geq 0$ B. $k\leq 0$ C. $k\geq −3$ D. $k\geq −4$

解：由题意知：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{k}{a+b}\geq 0$，$a>0$，$b>0$，$∴a+b>0$，即：$\frac{a+b}{ab}+\frac{k}{a+b}\geq 0$，即：$\frac{k}{a+b}\geq −\frac{a+b}{ab}$，
不等式两边同时乘以$a+b$得：$k\geq −\frac{\left(a+b\right)^{2}}{ab}$，要使$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{k}{a+b}\geq 0$恒成立，则$k\geq −\frac{\left(a+b\right)^{2}}{ab}$恒成立，
则$k⩾(−\frac{(a+b)^{2}}{ab})\_{max}$，又：$−\frac{\left(a+b\right)^{2}}{ab}=−\frac{a^{2}+2ab+b^{2}}{ab}=−\left(\frac{a}{b}+2+\frac{b}{a}\right)\leq −\left(2+2\sqrt{\frac{a}{b}⋅\frac{b}{a}}\right)=−4$，当且仅当$\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$，即$a=b$时取等号，$∴−\frac{\left(a+b\right)^{2}}{ab}$的最大值为$−4$，$∴k\geq −4$．故选*D*．

7.把函数$f(x)=sin\left(2x−\frac{π}{3}\right)$的图像向左平移$φ(0<φ<π)$个单位可以得到函数$g(x)$的图像，若$g(x)$是偶函数，则$φ$的值为(    )

A. $\frac{5π}{12}$ B. $\frac{π}{6}$ C. $\frac{5π}{12}$或$\frac{π}{6}$ D. $\frac{5π}{12}$或$\frac{11π}{12}$

解：把函数$f(x)=sin(2x−\frac{π}{3})$的图象向左平移$φ(0<φ<π)$个单位，可以得到函数$g(x)=sin(2x+2φ−\frac{π}{3})$的图象，若$g(x)$是偶函数，则$2φ−\frac{π}{3}=\frac{π}{2}+kπ$，$k\in Z$，$∴$分别令$k=0$、$k=1$，可得$φ=\frac{5π}{12}$，或$φ=\frac{11π}{12}$，故选：$D$．

8.已知函数$f\left(x\right)=sin\left(ωx+φ\right)\left(ω>0,\left|φ\right|\leq \frac{π}{2}\right)$，$x=−\frac{π}{8}$是函数$f\left(x\right)$的一个零点，$x=\frac{π}{8}$是函数$f\left(x\right)$的一条对称轴，若$f\left(x\right)$在区间$\left(\frac{π}{5},\frac{π}{4}\right)$上单调，则$ω$的最大值是(    )

A. $14$ B. $16$ C. $18$ D. $20$

解：设函数$f\left(x\right)$的最小正周期为$T$，因为$x=−\frac{π}{8}$是函数$f\left(x\right)$的一个零点，$x=\frac{π}{8}$是函数$f\left(x\right)$的一条对称轴，

则$\frac{2n+1}{4}T=\frac{π}{8}−\left(−\frac{π}{8}\right)=\frac{π}{4}$，其中$n\in N$，所以，$T=\frac{π}{2n+1}=\frac{2π}{ω}$，$∴ω=4n+2$，因为函数$f\left(x\right)$在区间$\left(\frac{π}{5},\frac{π}{4}\right)$上单调，则$\frac{π}{4}−\frac{π}{5}\leq \frac{T}{2}=\frac{π}{ω}$，所以，$ω\leq 20$．所以，$ω$的可能取值有：$2$、$6$、$10$、$14$、$18$．

$(i)$当$ω=18$时，$f\left(x\right)=sin\left(18x+φ\right)$，$f\left(−\frac{π}{8}\right)=sin\left(−\frac{9π}{4}+φ\right)=0$，所以，$φ−\frac{9π}{4}=kπ\left(k\in Z\right)$，则$φ=kπ+\frac{9π}{4}\left(k\in Z\right)$，$∵−\frac{π}{2}\leq φ\leq \frac{π}{2}$，$∴φ=\frac{π}{4}$，所以，$f\left(x\right)=sin\left(18x+\frac{π}{4}\right)$，当$\frac{π}{5}<x<\frac{π}{4}$时，$\frac{77π}{20}<18x+\frac{π}{4}<\frac{19π}{4}$，所以，函数$f\left(x\right)$在$\left(\frac{π}{5},\frac{π}{4}\right)$上不单调，不合乎题意；$(ii)$当$ω=14$时，$f\left(x\right)=sin\left(14x+φ\right)$，$f\left(−\frac{π}{8}\right)=sin\left(−\frac{7π}{4}+φ\right)=0$，所以，$φ−\frac{7π}{4}=kπ\left(k\in Z\right)$，则$φ=kπ+\frac{7π}{4}\left(k\in Z\right)$，$∵−\frac{π}{2}\leq φ\leq \frac{π}{2}$，$∴φ=−\frac{π}{4}$，所以，$f\left(x\right)=sin\left(14x−\frac{π}{4}\right)$，当$\frac{π}{5}<x<\frac{π}{4}$时，$\frac{51π}{20}<14x−\frac{π}{4}<\frac{13π}{4}$，所以，函数$f\left(x\right)$在$\left(\frac{π}{5},\frac{π}{4}\right)$上单调递减，合乎题意．因此，$ω$的最大值为$14$．故选：$A$．

二、多选题（本大题共**4**小题，共**20.0**分。在每小题有多项符合题目要求）

9.已知集合$P=\{x|x^{2}−8x−20\leq 0\}$，$S=\{x|1−m\leq x\leq 1+m\}.$若$x\in P$是$x\in S$的必要条件，则实数$m$的取值可以是(    )

A. $−1$ B. $1$ C. $3$ D. $5$

解：由题意知，集合$P=\{x|x^{2}−8x−20\leq 0\}=\left[−2,10\right]$，集合$S=\{x|1−m\leq x\leq 1+m\}$，因为$x\in P$是$x\in S$的必要条件，所以$S⊆P$．当集合$S$为空集时，则$1−m>1+m$，即$m<0$；当集合$S$不为空集时，则$\left\{\begin{matrix}m⩾0\\1−m⩾−2\\1+m⩽10\end{matrix}\right.$，解得$0⩽m⩽3$．综上：$m$的范围是$(−\infty ,3]$．故$m$的值可以是$−1$，$1$，$3$．故选：$ABC$．

10.函数$f(x)=Asin (ωx+φ)(ω>0,0<φ<π)$，$f(x)$图像一个最高点是$A(\frac{π}{3},2)$，距离点$A$最近的对称中心坐标为$(\frac{π}{4},0)$，则下列说法正确的有(    )

A. $ω$的值是$6$； B. $x\in (−\frac{π}{12},\frac{π}{12})$时，函数$f(x)$单调递增；
C. $x=\frac{13π}{12}$时函数$f(x)$图像的一条对称轴；
D. $f(x)$的图像向左平移$φ(φ>0)$个单位后得到$g(x)$图像，若$g(x)$是偶函数，则$φ$的最小值是$\frac{π}{6}$

解：由题意可知，$A=\pm 2$，$\frac{π}{3}−\frac{π}{4}=\frac{π}{12}=\frac{1}{4}T$，即$T=\frac{π}{3}$，其中$T$为$f(x)$的最小正周期，又因为$T=\frac{2π}{ω}$，所以$ω=6$，故*A*正确；当$A=2$时，$f(\frac{π}{3})=2sin (6×\frac{π}{3}+φ)=2$，由$0<φ<π$，可得$φ=\frac{π}{2}$，此时$f(x)=2sin (6x+\frac{π}{2})=2cos 6x$，$f(\frac{π}{4})=2cos \frac{3π}{2}=0$，满足题意；当$A=−2$时，$f(\frac{π}{3})=−2sin (6×\frac{π}{3}+φ)=2$，由$0<φ<π$，则$φ$无解，综上所述，$f(x)=2cos 6x$，从而$f(x)$是一个偶函数，故$f(x)$在$(−\frac{π}{12},\frac{π}{12})$上不单调，故*B*错误；又因为$f(\frac{13π}{12})=2cos (6×\frac{13π}{12})=0\ne A=2$，所以$x=\frac{13π}{12}$不是函数$f(x)$图像的一条对称轴，故*C*错误；对于选项*D*$:$由题意可得，$g(x)=2cos 6(x+φ)=2cos (6x+6φ)$，若$g(x)$是偶函数，则$6φ=kπ$，$k\in Z$，即$φ=\frac{1}{6}kπ$，$k\in Z$，又因为$φ>0$，所以$φ$的最小值是$\frac{π}{6}$，此时$k=1$，故*D*正确．故选：$AD$．

11.下列命题中正确的是(    )

A. $\frac{200π}{9}$和$1711°$均是第一象限角
B. 若$sinα⋅tanα>0$且$cosα⋅tanα<0$，则角$\frac{α}{2}$为第二或第四象限角
C. 若某扇形的面积为$2.5cm^{2}$，半径为$rcm$，弧长$l$满足$2r+l=7cm$，则该扇形圆心角的弧度数是$\frac{4}{5}$
D. 若$θ\in (0,π)$，且角$θ$与角$7θ$的终边相同，则$θ$的值是$\frac{π}{3}$或$\frac{2π}{3}$

解：对于$A$，$\frac{200π}{9}=22π+\frac{2π}{9}$，因为$\frac{2π}{9}$为第一象限角，所以$\frac{200π}{9}$为第一象限角，由于$1711°=4×360°+271°$，因为$271°$不是第一象限角，所以$1711°$不是第一象限角，故*A*错误$;$对于$B$选项，$∵sin α⋅tan α>0$，$cos α⋅tan α<0$，则角$α$为第四象限角，则$−\frac{π}{2}+2kπ<α<2kπ,k\in Z$，则$−\frac{π}{4}+kπ<\frac{α}{2}<kπ,k\in Z$，则$\frac{α}{2}$为第二或第四象限角，$B$选项正确；对于$C$，可得$\left\{\begin{matrix}l+2r=7\\\frac{1}{2}lr=2.5\end{matrix}\right.$，解得$\left\{\begin{matrix}r=\frac{5}{2}\\l=2\end{matrix}\right.$，或$\left\{\begin{matrix}r=1\\l=5\end{matrix}\right. ,$所以圆心角的弧度数为$\frac{l}{r}=\frac{4}{5}$或$5$，故$C$错误$;$对于$D$，因为角$θ$的与角$7θ$的终边相同，所以$7θ=θ+2kπ$，$k\in Z$，所以$θ=\frac{kπ}{3}$，$k\in Z$，令$0<\frac{kπ}{3}<π$，$k\in Z$，所以$k=1$，$2$，所以$θ=\frac{π}{3}$或$\frac{2π}{3}$，故$D$正确．故选*BD*

12.已知函数$f\left(x\right)=1−\frac{2}{2^{sinx}+1}\left(x\in R\right)$，下列说法正确的是．(    )

A. 函数$f\left(x\right)$是奇函数 B. 函数$f\left(x\right)$的值域为$\left[−\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$
C. 函数$f\left(x\right)$是周期为$π$的周期函数 D. 函数$f\left(x\right)$在$\left[\frac{π}{2},\frac{3π}{2}\right]$上单调递减

解：定义域为$R$，$f(−x)=1−\frac{2}{2^{−sin x}+1}=1−\frac{2}{2^{−sin x}+1}=1−\frac{2·2^{sinx}}{2^{sin x}+1}=1−\frac{2·\left(2^{sinx}+1\right)−2}{2^{sin x}+1}=−1+\frac{2}{2^{sin x}+1}=−f\left(x\right)$，所以函数$f(x)$是奇函数，故 *A*正确；$−⩽sinx⩽1⇒\frac{1}{2}⩽2^{sin x}⩽2⇒\frac{3}{2}⩽2^{sin x}+1⩽3⇒\frac{2}{3}⩽\frac{2}{2^{sin x}+1}⩽\frac{4}{3}$，$⇒−\frac{4}{3}⩽−\frac{2}{2^{sin x}+1}⩽−\frac{2}{3}⇒−\frac{1}{3}⩽1−\frac{2}{2^{sin x}+1}⩽\frac{1}{3}$，所以函数$f(x)$的值域为$\left[−\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$，故*B*正确；$f(x+π)=1−\frac{2}{2^{\sin((x+π))}+1}=1−\frac{2}{2^{−sinx}+1}=−f(x)\ne f(x)$，所以*C*错误；$x\in \left[\frac{π}{2},\frac{3π}{2}\right]$，$y=sinx$单调递减，$y=2^{sinx}+1$单调递减，$y=\frac{2}{2^{sin x}+1}$单调递增，$f(x)=1−\frac{2}{2^{sinx}+1}(x\in R)$单调递减，所以函数$f(x)$在$\left[\frac{π}{2},\frac{3π}{2}\right]$上单调递减，故*D*正确$;$故选*ABD*．

三、填空题（本大题共**4**小题，共**20.0**分）

13.已知$f(x)=log\_{\frac{1}{2}}(x^{2}−ax+3a)$在区间$(2,+\infty )$上是减函数，则实数$a$的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

解：令$t=x^{2}−ax+3a$，则由函数$f(x)=g(t)=log\_{\frac{1}{2}}t$在区间$(2,+\infty )$上为减函数，可得函数$t$在区间$[2,+\infty )$上为增函数且$t(2)⩾0$，故有$\left\{\begin{matrix}\frac{a}{2}\leq 2\\t(2)=4−2a+3a⩾0\end{matrix}\right.$，解得$−4⩽a\leq 4$，故实数$a$的取值范围是$−4⩽a\leq 4$，故答案为：$−4⩽a\leq 4$．

14.$\frac{1}{sin^{2}α+1}+\frac{4}{cos^{2}α+1}$的最小值为          ．

解：因为$sin^{2}α+cos^{2}α=1$，$sin^{2}α+1>0$，$cos^{2}α+1>0$

所以$\frac{1}{sin^{2}α+1}+\frac{4}{cos^{2}α+1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{sin^{2}α+1}+\frac{4}{cos^{2}α+1}\right)\left(sin^{2}α+cos^{2}α+2\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{sin^{2}α+1}+\frac{4}{cos^{2}α+1}\right)\left[\left(sin^{2}α+1\right)+\left(cos^{2}α+1\right)\right]=\frac{1}{3}\left(1+4+\frac{cos^{2}α+1}{sin^{2}α+1}+\frac{4\left(sin^{2}α+1\right)}{cos^{2}α+1}\right)\geq \frac{1}{3}\left(5+2\sqrt{\frac{cos^{2}α+1}{sin^{2}α+1}⋅\frac{4\left(sin^{2}α+1\right)}{cos^{2}α+1}}\right)=3$当且仅当$\frac{cos^{2}α+1}{sin^{2}α+1}=\frac{4\left(sin^{2}α+1\right)}{cos^{2}α+1}$即$sin^{2}α=0$，$cos^{2}α=1$时取等号，故答案为$3$．

15.定义在$R$上的单调函数$f(x)$满足：$f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right)$，若$F(x)=f(asinx)+f(sinx+cos^{2}x−3)$在$(0,π)$上有零点，则$a$的取值范围是

解：$①$令$x=y=0$，则$f(0)=2f(0)$，则$f(0)=0$；再令$y=−x$，则$f(x−x)=f(x)+f(−x)=0$，
且$f(x)$定义域为$R$，关于原点对称，$∴f(x)$是奇函数．$②F(x)=f(asinx)+f(sinx+cos^{2}x−3)$在$(0,π)$上有零点，$∴f(asinx)+f(sinx+cos^{2}x−3)=0$在$(0,π)$上有解，$∴f(asinx)=−f(sinx+cos^{2}x−3)=f(−sinx−cos^{2}x+3)$在$(0,π)$上有解，$∵$函数$f(x)$是$R$上的单调函数，$∴asinx=−sinx−cos^{2}x+3$在$(0,π)$上有解．$∵x\in (0,π)$，$∴sinx\ne 0$，$∴a=\frac{−sinx−cos^{2}x+3}{sinx}=sinx+\frac{2}{sinx}−1$，令$t=sinx$，$t\in (0,1]$，则$a=t+\frac{2}{t}−1$，令$y=t+\frac{2}{t}$，$t\in (0,1],$则根据对勾函数性质可知$y\_{min}=3,∴y\geq 3$，从而$a\geq 2$．故答案为$[2,+\infty )$．

16.某中学开展劳动实习，学生加工制作零件，零件的截面如图所示，$O$为圆孔及轮廓圆弧$AB$所在圆的圆心，$A$是圆弧$AB$与直线$AG$的切点，$B$是圆弧$AB$与直线$BC$的切点，四边形$DEFG$为矩形，$BC⊥DG$，垂足为$C$，$tan∠ODC=\frac{3}{5}$，$BH//DG$，$EF=12cm$，$DE=2cm$，$A$到直线$DE$和$EF$的距离均为$7cm$，圆孔半径为$1cm$，则图中阴影部分的面积为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$cm^{2}$．
解：设上面的大圆弧的半径为$x$ ，由题意中的长度关系易知$∠AGD=45^{∘}$ ，同理$∠AHO=45^{∘}$，可得$▵AOH$为等腰直角三角形，可得$OJ=AJ=\frac{\sqrt{2}}{2}x$ ，$OL=JK=5−\frac{\sqrt{2}}{2}x$ ，$DL=DK−LK=DK−OJ=7−\frac{\sqrt{2}}{2}x$ ，

其中$tan∠ODC=\frac{OL}{DL}=\frac{3}{5}$ ，可得$\frac{5−\frac{\sqrt{2}}{2}x}{7−\frac{\sqrt{2}}{2}x}=\frac{3}{5}$ ，解得$x=2\sqrt{2}$ ，$S\_{阴影}=S\_{扇形AOB}+S\_{△AOH}−\frac{1}{2}S\_{圆O}=\frac{1}{2}×\frac{3π}{4}×(2\sqrt{2})^{2}+\frac{1}{2}×(2\sqrt{2})^{2}−\frac{1}{2}π=(\frac{5}{2}π+4)cm^{2}$，故答案为$\frac{5}{2}π+4$．

四、解答题（本大题共**7**小题，共**84.0**分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.如图，在平面直角坐标系$xOy$中，钝角$α$的始边与$x$轴的非负半轴重合，终边与半径为$3$的圆相交于点$A$，过点$A$作$x$轴的垂线，垂足为点$B$，$OB=2$．
$(1)$求$tanα$的值； $(2)$求$\frac{2sin(α−\frac{3π}{2})+sin(π+α)}{cos(α+5π)}$的值．

解：$(1)$由题意可得$OA=3$，$OB=2$，$AB=\sqrt{OA^{2}−OB^{2}}=\sqrt{5}$，可得$A(−2,\sqrt{5})$，可得$tanα=−\frac{\sqrt{5}}{2}$．
$(2)$由$(1)$可得$tanα=−\frac{\sqrt{5}}{2}$，$\frac{2sin(α−\frac{3π}{2})+sin(π+α)}{cos(α+5π)}=\frac{2cosα−sinα}{−cosα}=\frac{2−tanα}{−1}=−\frac{4+\sqrt{5}}{2}$．

18.已知$1<a<b<c$，且$log\_{a}b+log\_{b}c=\frac{1}{2}+log\_{a}c$．
$(1)$若$c=a^{3}$，求$log\_{a}b$的值； $(2)$求$log\_{a}b+log\_{b}c$的最小值．

解：$(1)$由$c=a^{3}$，$log\_{a}b+log\_{b}c=\frac{1}{2}+log\_{a}c$，得$log\_{a}b+log\_{b}a^{3}=\frac{1}{2}+log\_{a}a^{3}$，即$log\_{a}b+\frac{3}{log\_{a} b}=\frac{7}{2}$， 所以$2\left(log\_{a}b\right)^{2}−7log\_{a}b+6=0$，解得$log\_{a}b=2$或$\frac{3}{2}$，又$1<a<b<c=a^{3}$，所以$1<log\_{a}b<3$，即$log\_{a}b=2$或$\frac{3}{2}$满足题意．

$(2)$因为$1<a<b<c$，所以$log\_{a}b>1$，$log\_{b}c>1$，$log\_{a}c>1$，所以$\frac{1}{2}+log\_{a}c=log\_{a}b+log\_{b}c\geq 2\sqrt{log\_{a}b·log\_{b}c}$，因此$\frac{1}{2}+log\_{a}c\geq 2\sqrt{log\_{a}c}$，即$(log\_{a}c)^{2}−3log\_{a}c+\frac{1}{4}\geq 0$，解得$log\_{a}c\geq \frac{3}{2}+\sqrt{2}$或$log\_{a}c\leq \frac{3}{2}−\sqrt{2}$，因为$log\_{a}c>1$，所以$log\_{a}c\geq \frac{3}{2}+\sqrt{2}$，因此$log\_{a}b+log\_{b}c=\frac{1}{2}+log\_{a}c\geq 2+\sqrt{2}$，当且仅当$log\_{a}b=log\_{b}c=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$时取等号，所以$log\_{a}b+log\_{b}c$的最小值为$2+\sqrt{2}$．

19.扬州市某研学基地，因地制宜划出一片区域，打造成“生态水果特色区”$.$经调研发现：某水果树的单株产量$W($单位：千克$)$与施用肥料$x($单位：千克$)$满足如下关系：$W(x)=\left\{\begin{matrix}2(x^{2}+17),0\leq x\leq 2\\50−\frac{8}{x−1},2<x\leq 5\end{matrix}\right.$，且单株施用肥料及其它成本总投入为$20x+10$元$.$已知这种水果的市场售价大约为$10$元$/$千克，且销路畅通供不应求$.$记该水果树的单株利润为$f(x)($单位：元$)$．
$(1)$求函数$f(x)$的解析式；
$(2)$当施用肥料为多少千克时，该水果树的单株利润最大？最大利润是多少？

解：$(1)$由已知$f(x)=10W(x)−(20x+10)$，又$W(x)=\left\{\begin{matrix}2(x^{2}+17),0\leq x\leq 2\\50−\frac{8}{x−1},2<x\leq 5\end{matrix}\right.$，
$∴f(x)=\left\{\begin{matrix}20(x^{2}+17)−(20x+10),0\leq x\leq 2\\500−\frac{80}{x−1}−(20x+10),2<x\leq 5\end{matrix}\right.$，整理得：$f(x)=\left\{\begin{matrix}20x^{2}−20x+330,0\leq x\leq 2\\490−\frac{80}{x−1}−20x,2<x\leq 5\end{matrix}\right.$；
$(2)$当$0\leq x\leq 2$时，$f(x)=20x^{2}−20x+330=20(x−\frac{1}{2})^{2}+325$，$∴$当$0\leq x\leq 2$时，$f(x)\leq f(2)=370$；当$2<x\leq 5$时，$f(x)=490−\frac{80}{x−1}−20x=490−[\frac{80}{x−1}+20(x−1)+20]=470−[\frac{80}{x−1}+20(x−1)]\leq 470−2\sqrt{\frac{80}{x−1}⋅20(x−1)}=390$，当且仅当$\frac{80}{x−1}=20(x−1)$，即$x=3$时等号成立，$f(x)\_{max}=390$，
$∵370<390$，$∴f(x)$的最大值为$390$．故当施用肥料为$3$千克时，该水果树的单株利润最大，最大利润是$390$元．

20.已知函数$f(x)=2cos(ωx+φ)(ω>0,|φ|<\frac{π}{2})$，其图象中相邻的两个对称中心的距离为$\frac{π}{2}$，再从条件$(1)$，条件$(2)$，条件$(3)$这三个条件中选择一个作为已知．条件$(1)$：函数$f(x)$的图象关于直线$x=−\frac{π}{3}$对称；条件$(2)$：函数$f(x)$的图象关于点$(−\frac{π}{12},0)$对称；条件$(3)$：对任意实数$x,f(x)\leq |f(−\frac{5π}{6})|$恒成立．
$(1)$求出$f(x)$的解析式；
$(2)$将$f(x)$的图象向左平移$\frac{π}{12}$个单位长度，得到曲线$y=g(x)$，若方程$g(x)=a$在$[\frac{π}{6},\frac{2π}{3}]$上有两根$α$，$β$，求$α+β$的值及$a$的取值范围．

解：$(1)$因为函数$f(x)=2cos(ωx+φ)(ω>0,|φ|<\frac{π}{2})$图象中相邻的两个对称中心的距离为$\frac{π}{2}$，所以$\frac{T}{2}=\frac{π}{2}$，即周期$T=π$，所以$ω=\frac{2π}{T}=2$，所以$f(x)=2cos(2x+φ)$．
若选择$①$：因为函数$f(x)$的图象关于直线$x=−\frac{π}{3}$轴对称，所以$2(−\frac{π}{3})+φ=kπ$，$k\in Z$，即$φ=kπ+\frac{2π}{3}$，$k\in Z$，因为$|φ|<\frac{π}{2}$，所以$φ=−\frac{π}{3}$，所以函数$y=f(x)$的解析式为$f(x)=2cos(2x−\frac{π}{3}).$
若选择$②$，函数$f(x)$的图象关于点$(−\frac{π}{12},0)$对称，所以$f(−\frac{π}{12})=2cos[2×(−\frac{π}{12})+φ]=0$，
所以$2(−\frac{π}{12})+φ=\frac{π}{2}+kπ$，$k\in Z$，即$φ=kπ+\frac{2π}{3}$，$k\in Z$，因为$|φ|<\frac{π}{2}$，所以$φ=−\frac{π}{3}$，所以函数$v=f(x)$的解析式为$f(x)=2cos(2x−\frac{π}{3}).$
若选$③$：对任意实数$x$，$f(x)\leq |f(−\frac{5π}{6})|$恒成立，所以$2(−\frac{5π}{6})+φ=kπ$，$k\in Z$，即$φ=kπ+\frac{5π}{3}$，$k\in Z$，
因为$|φ|<\frac{π}{2}$，所以$φ=−\frac{π}{3}$，所以函数$y=f(x)$的解析式为$f(x)=2cos(2x−\frac{π}{3}).$
$(2)$将$f(x)$的图象向左平移$\frac{π}{12}$个单位长度，得到曲线$y=g(x)$，所以$g(x)=2cos(2x−\frac{π}{6})$，
当$x\in [\frac{π}{6},\frac{2π}{3}]$时，$2x−\frac{π}{6}\in [\frac{π}{6},\frac{7π}{6}]$，当$2x−\frac{π}{6}=π$时，$g(x)$有最小值$−2$且关于$x=\frac{7π}{12}$对称，所以$α+β=2×\frac{7π}{12}=\frac{7π}{6}$，因为$f(\frac{π}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$f(\frac{2π}{3})=−\sqrt{3}$，所以$−2<a\leq −\sqrt{3}$，即$a$的取值范围为$(−2,−\sqrt{3}].$

21.设函数$f(x)=ka^{x}−a^{−x}(a>0$且$a\ne 1)$是奇函数．

$(1)$求常数$k$的值$;$

$(2)$若$a>1$，试判断函数$f(x)$的单调性，并加以证明$;$

$(3)$若已知$f(1)=\frac{8}{3}$，且函数$g(x)=a^{2x}+a^{−2x}−2mf(x)$在区间$[1,+\infty )$上的最小值为$−2$，求实数$m$的值．

解：$(1)$函数$f(x)=ka^{x}−a^{−x}$的定义域为$R$，$∵$函数$f(x)=ka^{x}−a^{−x}(a>0$且$a\ne 1)$是奇函数，

$∴f(0)=k−1=0$，$∴k=1;$

$(2)$函数$f(x)$在$R$上为单调增函数．证明：$f(x)=a^{x}−a^{−x}$，任取$x\_{1}$，$x\_{2}\in R$，且$x\_{1}<x\_{2}$，

$f(x\_{1})−f(x\_{2})=(a^{x\_{1}}−a^{−x\_{1}})−(a^{x\_{2}}−a^{−x\_{2}})=(a^{x\_{1}}−a^{x\_{2}})+(\frac{1}{a^{x\_{2}}}−\frac{1}{a^{x\_{1}}})=(a^{x\_{1}}−a^{x\_{2}})+\frac{a^{x\_{1}}−a^{x\_{2}}}{a^{x\_{1}}a^{x\_{2}}}=(a^{x\_{1}}−a^{x\_{2}})\left(1+\frac{1}{a^{x\_{1}}a^{x\_{2}}}\right)$．$∵a>1$，$x\_{1}<x\_{2}$，$∴0<a^{x\_{1}}<a^{x\_{2}}$，$∴f(x\_{1})−f(x\_{2})<0$，即$f(x\_{1})<f(x\_{2})$，

$∴$函数$f(x)$在$R$上为单调增函数$;$

$(3)∵f(1)=\frac{8}{3}$，$∴a−a^{−1}=\frac{8}{3}$，解得$a=3$或$a=−\frac{1}{3}$．$∵a>0$且$a\ne 1$，$∴a=3$，$∴g(x)=3^{2x}+3^{−2x}−2m(3^{x}−3^{−x})=(3^{x}−3^{−x})^{2}−2m(3^{x}−3^{−x})+2(x\geq 1)$．令$t=3^{x}−3^{−x}$，由$(2)$可知函数$t=3^{x}−3^{−x}$在$\left[1,+\infty \right)$上单调递增，所以$t⩾\frac{8}{3}$，则$y=t^{2}−2mt+2=(t−m)^{2}−m^{2}+2$，$(t⩾\frac{8}{3})$，当$m\geq \frac{8}{3}$时，当$t=m$时，函数取最小值，$y\_{min}=−m^{2}+2=−2$，解得$m=\pm 2$，与$m\geq \frac{8}{3}$矛盾，舍去$;$当$m<\frac{8}{3}$时，则函数$y=t^{2}−2mt+2$在$\left[\frac{8}{3},+\infty \right)$上单调递增，所以，当$t=\frac{8}{3}$时，函数取最小值，$y\_{min}=\left(\frac{8}{3}\right)^{2}−2m×\frac{8}{3}+2=−2$，解得$m=\frac{25}{12}$，综上可得$m=\frac{25}{12}$．

22.已知函数$f(x)=4−msinx−3cos^{2}x(m\in R).$

$(1)$若关于$x$的方程$f(x)=0$在区间$(0,π)$上有三个不同解$x\_{1},x\_{2},x\_{3}$，求$m$与$x\_{1}+x\_{2}+x\_{3}$的值；

$(2)$对任意$x\in \left[−\frac{π}{6},π\right]$，都有$f(x)>0$，求$m$的取值范围．

解：$(1)f(x)=4−msinx−3cos^{2}x=3sin^{2}x−msinx+1$，设$t=sinx$，因为$x\in (0,π)$，所以$t\in (0,1]$，由$f(x)=0$得，$3t^{2}−mt+1=0$，因为$f(x)$在$(0,π)$有且只有三个零点，所以方程$3t^{2}−mt+1=0$中存在两根$t\_{1}$，$t\_{2}$，且其中一根为$1$，另一根在区间$(0,1)$内，不妨设$t\_{1}=1$，则$3×1^{2}−m+1=0$，解得$m=4$，此时$t\_{2}=\frac{1}{3}$适合题意．所以$m=4$，由$sinx=1$得，$x\_{1}=\frac{π}{2};$由$sinx=\frac{1}{3}$得，$x\_{2}+x\_{3}=π$，所以$x\_{1}+x\_{2}+x\_{3}=\frac{3π}{2}$．
$(2)$当$x\in [−\frac{π}{6},π]$时，$t\in [−\frac{1}{2},1]$，$f(x)>0$等价于$3t^{2}−mt+1>0$，设$g(t)=3t^{2}−mt+1$，$t\in [−\frac{1}{2},1]$，所以$g(t)\_{min}>0$，$ ①$当$\frac{m}{6}<−\frac{1}{2}$，即$m<−3$时，$g(t)$在$[−\frac{1}{2},1]$上递增，$g(t)\_{min}=g(−\frac{1}{2})=\frac{m}{2}+\frac{7}{4}$，
所以$\frac{m}{2}+\frac{7}{4}>0$，$m>−\frac{7}{2}$，又$m<−3$，所以$−\frac{7}{2}<m<−3$，$ ②$当$−\frac{1}{2}\leq \frac{m}{6}\leq 1$，即$−3\leq m\leq 6$时，$g(t)$在$[−\frac{1}{2},\frac{m}{6}]$上递减，在$[\frac{m}{6},1]$上递增，所以$g(t)\_{min}=g(\frac{m}{6})=1−\frac{m^{2}}{12}$，所以$1−\frac{m^{2}}{12}>0$，$m^{2}<12$，又$−3\leq m\leq 6$，所以$−3\leq m<2\sqrt{3}$．$ ③$当$\frac{m}{6}>1$，即$m>6$时，$g(t)$在$[−\frac{1}{2},1]$上递减，$g(t)\_{min}=g(1)=4−m$，
所以$4−m>0$，$m<4$，又$m>6$，所以$m$无解．综上，实数$m$的取值范围是$(−\frac{7}{2},2\sqrt{3}).$