

江苏省仪征中学 2022-2023 学年度第一学期高一数学周练（11）

班级_____学号_____姓名_____评价_____

2022.12.11

一、单选题（本大题共 8 小题，共 40.0 分。在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 设集合 $A = \{x \mid -1 < x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 0 < x < 4\}$, 则 $A \cap B = ()$

- A. $\{x \mid 0 < x < 3\}$ B. $\{x \mid -1 < x < 4\}$ C. $\{1, 2\}$ D. $\{0, 1, 2\}$

2. 已知角 α 的终边经过点 $P(-2, 1)$, 则 $\cos(\alpha + \frac{3\pi}{2})$ 的值为 $()$

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

3. $\sin 600^\circ$ 的值等于 $()$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

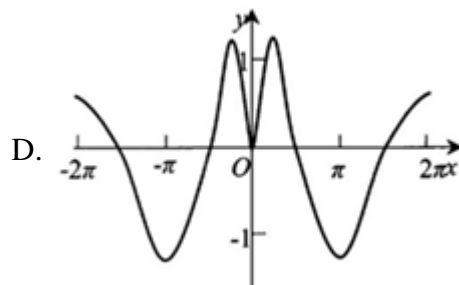
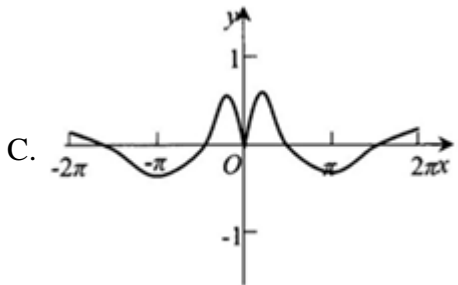
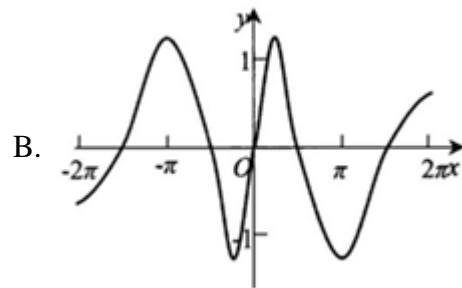
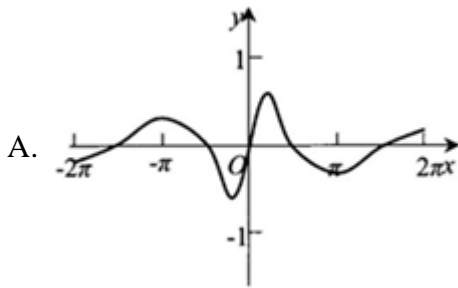
4. 已知 $a = 0.7^{1.3}$, $b = 3^{0.2}$, $c = \log_{0.2} 5$, 则 a, b, c 的大小关系为 $()$

- A. $a < c < b$ B. $c < b < a$ C. $b < c < a$ D. $c < a < b$

5. 下列函数既是奇函数, 又在区间 $[-1, 1]$ 上单调递减的是 $()$

- A. $f(x) = \sin x$ B. $f(x) = -|x + 1|$
 C. $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ D. $f(x) = \ln \frac{2-x}{2+x}$

6. 函数 $f(x) = \frac{x \cos x}{x^2 + 1}$ 的图像大致如下 $()$



7. 已知函数 $f(x) = \log_2 \frac{x}{2} \cdot \log_2 \frac{x}{8}$, 若 $f(x_1) = f(x_2)$ (其中 $x_1 \neq x_2$), 则 $\frac{1}{x_1} + \frac{9}{x_2}$ 的最小值为 $()$

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{3}{2}$ C. 2 D. 4

8. 已知函数 $f(x)$, $g(x)$ 是定义在 R 上的函数, 其中 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 且

$$f(x) + g(x) = ax^2 - x + 2. \text{若对于任意 } 1 < x_1 < x_2 < 2, \text{ 都有 } \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} > -4,$$

则实数 a 的取值范围是()

- A. $(-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$ B. $(0, +\infty)$
 C. $[-1, +\infty)$ D. $[-1, 0)$

二、多选题 (本大题共 4 小题, 共 20.0 分。在每小题有多项符合题目要求)

9. 已知 $a < b < 0$, $c > 0$, 则()

- A. $\frac{c}{a} < \frac{c}{b}$ B. $\frac{c}{a^2} < \frac{c}{b^2}$ C. $\frac{b}{a} < \frac{c-b}{c-a}$ D. $\frac{a^2}{b^2} < \frac{a^2+c}{b^2+c}$

10. 已知函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ ($-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$)的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称, 则()

- A. $f(0) = \frac{1}{2}$
 B. 函数 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}]$ 上单调递增
 C. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{5\pi}{12}, 0)$ 成中心对称
 D. 若 $|f(x_1) - f(x_2)| = 2$, 则 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$

11. 已知 $f(x)$ 是定义域为 R 的奇函数, 满足 $f(x+2) = -f(x)$, 且当 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x) = 2\sqrt{x}$,

则()

- A. $f(-3) = -2$
 B. 函数 $f(x)$ 是周期函数
 C. 不等式 $f(x) > 0$ 的解集是 $\{x | 4k < x < 4k + 2, k \in Z\}$
 D. 当关于 x 的方程 $f(x) = mx$ 恰有三个不同的解时, $m = 2$

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\sin x|, & (\sin x \geq \cos x) \\ |\cos x|, & (\cos x > \sin x) \end{cases}$, 则下列结论正确的是()

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 2π
 B. $f(x)$ 是偶函数
 C. $f(x)$ 在区间 $(\pi, \frac{5\pi}{4})$ 上单调递增
 D. $f(x)$ 的对称轴方程为 $x = k\pi + \frac{\pi}{4} (k \in Z)$

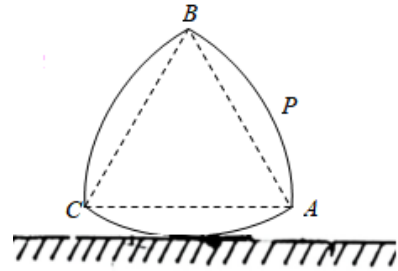
三、填空题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

13. 已知幂函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(2, \sqrt{2})$ ，则 $f(4)$ 的值为_____.

14. 已知扇形 AOB 的面积为 $\frac{3\pi}{4}$ ，圆心角为 120° ，则该扇形所在圆的半径为_____.

15. 已知定义域为 R 的奇函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数，且 $f(-\frac{1}{2}) = 0$ ，则不等式 $f(\log_4 x) > 0$ 的解集是_____.

16. 分别以正三角形的顶点为圆心，以其边长为半径作圆弧，由这三段圆弧组成的曲边三角形称为“勒洛三角形”，它在机械加工业上具有广泛用途. 如图，放置在地面上的勒洛三角形 ABC 与地面的唯一接触点恰好是弧 \widehat{AC} 的中点 D ，已知正三角形 ABC 的边长为 2cm ，动点 P 从 A 处出发，沿着勒洛三角形按逆时针方向以每秒 $\frac{\pi}{3}\text{cm}$ 的速度匀速运动，点 P 在 t (单位：秒) 时距离地面的高度为 y (单位： cm)，则当 $t = 3$ 秒时， $y =$ _____ cm ；当 $0 \leq t \leq 2$ 时， $y =$ _____. (用 t 表示)



四、解答题（本大题共 6 小题，共 70.0 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17. 计算 (1) $(2\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}} - \pi^0 - e^{\ln 0.5} - \log_9 8 \times \log_4 3 + \cos \frac{\pi}{6}$;

(2) 已知 $\sin \theta + \cos \theta = -\frac{1}{5}$ ($0 < \theta < \pi$)，计算 $\frac{1-2\sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}$.

18. 已知 $f(\alpha) = \frac{\sin(2\pi - \alpha) \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\cos(\alpha - \frac{3\pi}{2}) \tan(\pi + \alpha)}$.

(1) 若 $f(\alpha) = \frac{1}{2}$ ，且 $\alpha \in (0, \pi)$ ，求 α 的值；

(2) 若 $f(\alpha + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{3}$ ，求 $\sin^2(\frac{2\pi}{3} - \alpha) + \sin(\frac{\pi}{6} - \alpha)$ 的值.

19. 已知集合: ① $A = \{x | \frac{4}{x+1} > 1\}$; ② $A = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$; ③ $A = \{x | |x - 1| < 2\}$, 集合
 $B = \{x | x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m < 0\}$ (m 为常数), 从①②③这三个条件中任选一个作为
 集合 A , 求解下列问题:

(1) 定义 $A - B = \{x | x \in A, x \notin B\}$, 当 $m = 0$ 时, 求 $A - B$;

(2) 设命题 $p: x \in A$, 命题 $q: x \in B$, 若 p 是 q 成立的必要不充分条件, 求实数 m 的取值范围.

20. 函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$ ($\omega > 0$) 图象的相邻对称轴与对称中心之间的距离为 $\frac{\pi}{4}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的单调递增区间;

(2) 当 $x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ 时, 求 $f(x)$ 的值域.

21. 已知函数 $f(x) = (\frac{1}{3})^x$, 函数 $g(x) = \log_{\frac{1}{3}}x$.

(1) 若函数 $y = g(mx^2 + mx + 2)$ 的定义域为 R , 求实数 m 的取值范围;

(2) 是否存在非负实数 m, n , 使得函数 $y = g[f(x^2)]$ 的定义域为 $[m, n]$, 值域为 $[2m, 2n]$, 若存在,
 求出 m, n 的值; 若不存在, 则说明理由;

(3) 当 $x \in [-1, 1]$ 时, 求函数 $y = [f(x)]^2 - 2af(x) + 3$ 的最小值 $h(a)$.

22. 已知 $a < 0$, 函数 $f(x) = a\cos x + \sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}$, 其中 $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(1) 设 $t = \sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}$, 求 t 的取值范围, 并把 $f(x)$ 表示为 t 的函数 $g(t)$;

(2) 求函数 $f(x)$ 的最大值(可以用 a 表示);

(3) 设 $a = -1$, 若对 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 内的任意 x_1, x_2 , 若有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq m$, 求实数 m 的取值范围.

高一数学周练（11）答案和解析

1. 【答案】C

解： $B = \{x \in N^* \mid 0 < x < 4\} = \{1, 2, 3\}$, $A = \{x \mid -1 < x < 3\}$, 所以 $A \cap B = \{1, 2\}$. 故选 C.

2. 【答案】A

解：由题意，角 α 的终边经过点 $P(-2, 1)$, 可得 $r = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$,

根据三角函数的定义，可得 $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 又由 $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$. 故选：A.

3. 【答案】C

解： $\sin 600^\circ = \sin(2 \times 360^\circ - 120^\circ) = -\sin 120^\circ = -\sin(180^\circ - 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选：C.

4. 【答案】D

解： $\because 0 < a = 0.7^{1.3} < 1$, $b = 3^{0.2} > 1$, $c = \log_{0.2} 5 < 0$, $\therefore c < a < b$. 故选 D.

5. 【答案】D

解：对于A，函数 $f(x) = \sin x$, 是奇函数，在 $[-1, 1]$ 上单调递增，不满足条件.

对于B，函数 $f(x) = -|x + 1|$ 不是奇函数，不满足条件，

对于C，函数 $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ 是偶函数，不满足条件，

对于D，函数 $f(x) = \ln \frac{2-x}{2+x}$ 的定义域为 $(-2, 2)$, 并且

$f(-x) + f(x) = \ln \frac{2+x}{2-x} + \ln \frac{2-x}{2+x} = 0$, 所以它是奇函数，

又 $f(x) = \ln \frac{2-x}{2+x} = \ln\left(\frac{4}{2+x} - 1\right)$, 区间 $[-1, 1]$ 上单调递减，满足条件. 故选 D.

6. 【答案】A

解： $f(-x) = \frac{-x \cos(-x)}{(-x)^2 + 1} = -\frac{x \cos x}{x^2 + 1} = -f(x)$, 则 $f(x)$ 是奇函数，排除 C, D,

$f(\pi) = \frac{\pi \cos \pi}{\pi^2 + 1} = -\frac{\pi}{\pi^2 + 1} \in (-1, 0)$, 排除 B, 故选：A.

7. 【答案】B

【解析】

【分析】

根据二次函数的性质及对数的运算可得 $x_1 \cdot x_2 = 16$ ，利用基本不等式即可求得答案.

本题考查对数函数的性质，二次函数性质，转化思想，基本不等式的应用，属于中档题.

【解答】

解：因为 $f(x) = \log_2 \frac{x}{2} \cdot \log_2 \frac{x}{8} = (\log_2 x - 1)(\log_2 x - 3) = (\log_2 x)^2 - 4\log_2 x + 3$,

又因为 $f(x_1) = f(x_2)$ (其中 $x_1 \neq x_2$),

所以 $(\log_2 x_1)^2 - 4\log_2 x_1 + 3 = (\log_2 x_2)^2 - 4\log_2 x_2 + 3$,

$$(\log_2 x_1 - \log_2 x_2)(\log_2 x_1 + \log_2 x_2) - 4(\log_2 x_1 - \log_2 x_2) = 0$$

即 $(\log_2 x_1 - \log_2 x_2)(\log_2 x_1 + \log_2 x_2 - 4) = 0$

因为 $x_1 \neq x_2$, 所以 $\log_2 x_1 - \log_2 x_2 \neq 0$

所以 $\log_2 x_1 + \log_2 x_2 = 4$, 即 $x_1 \cdot x_2 = 16$,

所以 $\frac{1}{x_1} + \frac{9}{x_2} \geq 2\sqrt{\frac{9}{x_1 x_2}} = 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$, 当且仅当 $\frac{1}{x_1} = \frac{9}{x_2}$, 即 $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = 12$ 时取“=”,

故选：B.

8. 【答案】C

【解析】

【分析】

本题考查函数奇偶性与单调性的综合应用，属于中档题.

对于已知 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的奇偶性，求出 $f(x)$ 与 $g(x)$ ，令 $h(x) = g(x) + 4x = ax^2 + 4x + 2$ ，再由

$\frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} > -4$ ，则函数 $h(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递增，再结合函数单调性对 a 进行分类讨论求解.

【解答】

解：因为 $f(x)$ 是奇函数， $g(x)$ 是偶函数，

所以 $f(-x) = -f(x)$ ， $g(-x) = g(x)$.

又 $f(x) + g(x) = ax^2 - x + 2$,

则 $f(-x) + g(-x) = -f(x) + g(x) = ax^2 + x + 2$ ，两式相加可得 $g(x) = ax^2 + 2$.

若对于任意 $1 < x_1 < x_2 < 2$, 都有 $\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2} > -4$,

可变形为 $\frac{[g(x_1)+4x_1]-[g(x_2)+4x_2]}{x_1-x_2} > 0$,

令 $h(x) = g(x) + 4x = ax^2 + 4x + 2$, 则函数 $h(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增,

当 $a = 0$ 时, $h(x) = 4x + 2$ 在 $(1,2)$ 上单调递增, 符合题意.

当 $a \neq 0$ 时, 函数 $h(x) = ax^2 + 4x + 2$ 为二次函数, 图象的对称轴为直线 $x = -\frac{2}{a}$,

因为函数 $h(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增, 所以 $\begin{cases} a > 0, \\ -\frac{2}{a} \leq 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a < 0, \\ -\frac{2}{a} \geq 2, \end{cases}$ 解得 $a > 0$ 或 $-1 \leq a < 0$.

综上所述, $a \in [-1, +\infty)$.

故选 C.

9. 【答案】BC

【解析】

【分析】

本题主要考查不等式的基本性质, 属于中档题.

根据不等式的性质和作差法逐一判断即可.

【解答】

解: 因为 $a < b < 0$, 所以 $0 > \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$,

且 $c > 0$, 则 $\frac{c}{a} > \frac{c}{b}$, 故 A 错误;

$a^2 > b^2$, 则 $\frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2}$, 又 $c > 0$, 故 $\frac{c}{a^2} < \frac{c}{b^2}$, 故 B 正确;

$$\frac{b}{a} - \frac{c-b}{c-a} = \frac{bc-ab-ac+ab}{a(c-a)} = \frac{c(b-a)}{a(c-a)},$$

因为 $b - a > 0$, $c - a > 0$, $c > 0$, $a < 0$,

故 $\frac{c(b-a)}{a(c-a)} < 0$, 所以 $\frac{b}{a} < \frac{c-b}{c-a}$, 故 C 正确;

$$\frac{a^2}{b^2} - \frac{a^2+c}{b^2+c} = \frac{a^2b^2+a^2c-a^2b^2-b^2c}{b^2(b^2+c)} = \frac{(a+b)(a-b)c}{b^2(b^2+c)},$$

因为 $a + b < 0$, $a - b < 0$, $c > 0$, $b^2 > 0$, $b^2 + c > 0$,

可得 $\frac{(a+b)(a-b)c}{b^2(b^2+c)} > 0$, 所以 $\frac{a^2}{b^2} > \frac{a^2+c}{b^2+c}$, 故 D 错误.

故选 BC.

10. 【答案】BD

【解析】

【分析】

本题考查的知识要点：三角函数的关系式的确定，正弦型函数的性质的应用，属于中档题。

首先利用函数的对称性求出函数的关系式，进一步利用正弦型函数性质的应用判断A、B、C、D的结论。

【解答】

解：对于函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ 的图象关于 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称，

$$\text{故 } f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \varphi\right) = \pm 1,$$

$$\text{由于 } -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{故 } \varphi = -\frac{\pi}{6},$$

$$\text{所以 } f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right);$$

对于A：由于 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ ，所以 $f(0) = -\frac{1}{2}$ ，故A错误；

对于B：由于 $x \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right]$ ，故 $2x - \frac{\pi}{6} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ，故函数在该区间上单调递增，故B正确；

对于C：当 $x = \frac{5\pi}{12}$ 时， $f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，故C错误；

对于D：若 $|f(x_1) - f(x_2)| = 2$ ，则 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$ ，故D正确。

故选：BD。

11. 【答案】BC

【解析】

【分析】

本题考查函数的奇偶性，周期性，及函数图象的应用，属于中档题。

根据题意求得函数的周期，画出函数的大致图象，结合图象判断选项即可。

【解答】

$$\text{解：} \because f(x+2) = -f(x), \therefore f(x+4) = -f(x+2) = -[-f(x)] = f(x),$$

即函数 $f(x)$ 是周期为4的周期函数，故B正确；

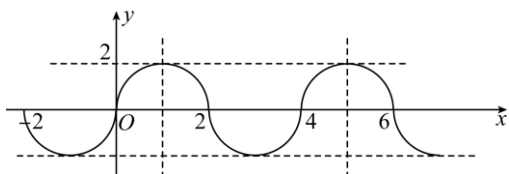
$$\text{当 } x \in (0,1] \text{ 时， } f(x) = 2\sqrt{x},$$

故 $f(-3) = f(-3 + 4) = f(1) = 2$ ，故 A 错误；

由 $f(x + 2) = -f(x) = f(-x)$ 可得 $f(x)$ 关于直线 $x = 1$ 对称，

根据函数的周期性及解析式，结合 $f(x)$ 是定义域为 R 的奇函数，

可画出函数 $f(x)$ 的大致图象如下：



根据图象可得：不等式 $f(x) > 0$ 的解集是 $\{x | 4k < x < 4k + 2, k \in Z\}$ ，故 C 正确；

结合函数图象，当 $m = 1$ 时，关于 x 的方程 $f(x) = x$ 也有三个不同的解，故 D 错误，

故选 BC 。

12. 【答案】ACD

【解析】

【分析】

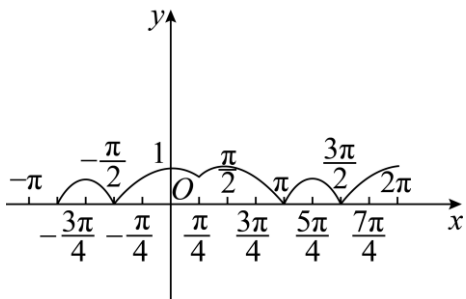
本题考查了三角函数的性质，考查函数的单调性，奇偶性问题，考查转化思想，数形结合思想，是一道中档题。

由题意，结合函数的图象以及函数的单调性和奇偶性分别判断即可。

【解答】

$$\text{解：函数 } f(x) = \begin{cases} |\sin x|, & (\sin x \geq \cos x) \\ |\cos x|, & (\cos x > \sin x) \end{cases} = \begin{cases} |\sin x|, & 2k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x \leq 2k\pi + \frac{5\pi}{4}, k \in Z \\ |\cos x|, & 2k\pi - \frac{3\pi}{4} < x < 2k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in Z \end{cases}$$

作出函数 $f(x)$ 的大致图象，如图所示：



易知 $f(x)$ 的最小正周期为 2π ，故 A 正确；

由函数 $f(x)$ 的图象可得，函数 $f(x)$ 的图象不关于 y 轴对称，故 $f(x)$ 不是偶函数，故 B 错误；

由函数 $f(x)$ 的图象可得，函数 $f(x)$ 在区间 $(\pi, \frac{5\pi}{4})$ 上单调递增，故 C 正确；

当 $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$, $k \in Z$ ，结合图象可得 $f(x)$ 的对称轴方程为 $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ ($k \in Z$)，故 D 正确，

故选：ACD.

13. 【答案】2

【解析】

【分析】

本题考查幂函数的解析式和函数值，是基础题. 解题时要认真审题，仔细解答，注意幂函数的性质和应用.

设幂函数 $f(x) = x^a$ ，由 $f(x)$ 过点 $(2, \sqrt{2})$ ，知 $2^a = \sqrt{2}$ ，由此能求出 $f(4)$.

【解答】

解：设幂函数 $f(x) = x^a$ ，

$\because f(x)$ 过点 $(2, \sqrt{2})$ ，

$$\therefore 2^a = \sqrt{2}, a = \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(4) = 4^{\frac{1}{2}} = 2.$$

故答案为2.

14. 【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】

本题主要考查了扇形的面积公式的应用，属于基础题.

由已知利用扇形的面积公式即可求解.

【解答】

解：设扇形所在圆的半径为 r ，

因为扇形 AOB 的面积为 $\frac{3\pi}{4}$ ，圆心角 AOB 为 $\frac{2\pi}{3}$ ，

可得扇形的面积 $S = \frac{1}{2}r^2\alpha$ ，可得： $\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{2} \times r^2 \times \frac{2\pi}{3}$ ，解得： $r = \frac{3}{2}$.

故答案为 $\frac{3}{2}$.

15. 【答案】 $(\frac{1}{2}, 1) \cup (2, +\infty)$

【解析】

【分析】

本题考查函数的奇偶性和单调性的判断和运用：解不等式，考查分类讨论思想方法和运算能力，属于中档题。

由题意可得 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数，且 $f(\frac{1}{2}) = -f(-\frac{1}{2}) = 0$ ，讨论 $\log_4 x > 0$ 和 $\log_4 x < 0$ ，解不等式即可得到所求解集。

【解答】

解：定义域为 R 的奇函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数，且 $f(-\frac{1}{2}) = 0$ ，

可得 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是增函数，且 $f(\frac{1}{2}) = -f(-\frac{1}{2}) = 0$ ，

当 $\log_4 x > 0$ 即 $x > 1$ ， $f(\log_4 x) > 0$ 即为 $\log_4 x > \frac{1}{2}$ ，解得 $x > 2$ ；

当 $\log_4 x < 0$ 即 $0 < x < 1$ ， $f(\log_4 x) > 0$ 即为 $\log_4 x > -\frac{1}{2}$ ，解得 $\frac{1}{2} < x < 1$ 。

综上所述，原不等式的解集为 $(\frac{1}{2}, 1) \cup (2, +\infty)$ 。

故答案为： $(\frac{1}{2}, 1) \cup (2, +\infty)$ 。

16. 【答案】 $3 - \sqrt{3}$

$$2\sin\frac{\pi}{6}t + 2 - \sqrt{3}$$

【解析】

【分析】

本题考查圆弧的角度与弧长的关系，属中档题。

当 $t = 3$ 时， P 走到了 \widehat{BC} 的中点，计算可得 $y = 3 - \sqrt{3}$ ，当 $0 \leq t \leq 2$ 时， P 在 \widehat{AB} 上移动，可求得

$\angle ACP = \frac{\pi}{6}t$ ，从而可求得 $y = 2\sin\frac{\pi}{6}t + 2 - \sqrt{3}$ 。

【解答】

解: $\widehat{AB} = \frac{\pi}{3} \times 2 = \frac{2\pi}{3} \text{ cm}$, 当 $t = 3$ 时, P 走过的路程为 $\frac{\pi}{3} \times 3 = \pi$, 由于 $\widehat{BC} = \widehat{AB} = \frac{2\pi}{3} \text{ cm}$,

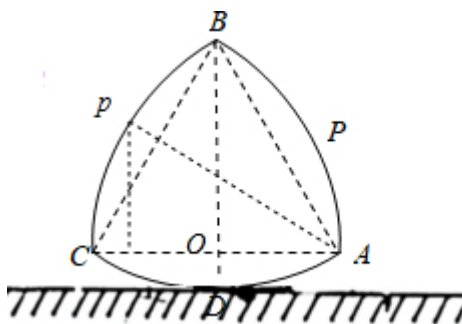
故此时 P 走到了 \widehat{BC} 的中点, 则

$$y = PA \sin \angle PAC + OD,$$

$$\text{又 } OD = BD - BO = 2 - \sqrt{2^2 - 1} = 2 - \sqrt{3},$$

$$\text{所以 } y = PA \sin \angle PAC + OD = 2 \times \sin \frac{\pi}{6} + 2 -$$

$$\sqrt{3} = (3 - \sqrt{3}) \text{ cm},$$



当 $0 \leq t \leq 2$ 时, P 在 \widehat{AB} 上移动, 其路程为 $\widehat{AP} = \frac{\pi}{3}t$, 由 $l = \alpha r$, 可得 $\angle ACP = \frac{\pi}{6}t$,

所以 P 到 AC 边的距离为 $d = PC \times \sin \angle ACP = 2 \sin \frac{\pi}{6}t$,

$$\text{故 } y = (2 \sin \frac{\pi}{6}t + 2 - \sqrt{3}) \text{ cm}.$$

故答案为: $3 - \sqrt{3}; 2 \sin \frac{\pi}{6}t + 2 - \sqrt{3}$.

17. 【答案】解: (1) 原式 = $(\frac{9}{4})^{\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{3 \lg 2}{2 \lg 3} \cdot \frac{\lg 3}{2 \lg 2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$= \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}-3}{4}.$$

$$(2) \because \sin \theta + \cos \theta = -\frac{1}{5},$$

$$\therefore (\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{25},$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{12}{25} < 0,$$

$$\because \theta \in (0, \pi),$$

$$\therefore \sin \theta > 0, \cos \theta < 0,$$

$$\therefore (\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2 \times (-\frac{12}{25}) = \frac{49}{25},$$

$$\therefore \sin \theta - \cos \theta = \frac{7}{5},$$

$$\therefore \frac{1-2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta} = \frac{(\cos\theta-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta-\sin^2\theta} = \frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta} = \frac{-\frac{7}{5}}{-\frac{1}{5}} = 7.$$

【解析】本题主要考查了指数函数, 对数函数的运算性质和特殊角的三角函数值以及平方和(差)公式, 同角三角函数基本关系式的应用, 属于基础题.

(1) 由题意利用指数函数, 对数函数的运算性质和特殊角的三角函数值即可求解.

(2)利用平方和(差)公式及同角三角函数基本关系式即可求解.

18. 【答案】解: (1) $f(\alpha) = \frac{\sin(2\pi-\alpha)\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{\cos(\alpha-\frac{3\pi}{2})\tan(\pi+\alpha)} = \frac{-\sin\alpha \cdot \sin\alpha}{-\sin\alpha \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \cos\alpha$,

因为 $f(\alpha) = \frac{1}{2}$, 所以 $\cos\alpha = \frac{1}{2}$,

又 $\alpha \in (0, \pi)$, 所以 $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

(2)由(1)知 $f(\alpha + \frac{\pi}{3}) = \cos(\alpha + \frac{\pi}{3})$,

由题意知 $f(\alpha + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{3}$,

所以 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{3}$,

令 $x = \alpha + \frac{\pi}{3}$, 则 $\cos x = \frac{1}{3}$,

所以 $\sin^2(\frac{2\pi}{3} - \alpha) + \sin^2(\frac{\pi}{6} - \alpha) = \sin^2(\pi - x) + \sin^2(\frac{\pi}{2} - x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 - \cos^2 x + \cos x = \frac{11}{9}$.

【解析】 本题考查利用诱导公式化简和利用同角三角函数基本关系化简, 属于较易题.

(1)由题意结合诱导公式以及同角三角函数基本关系化简 $f(\alpha)$, 即可求出 α 的值;

(2)由题意结合诱导公式以及同角三角函数基本关系, 即可求出 $\sin^2(\frac{2\pi}{3} - \alpha) + \sin^2(\frac{\pi}{6} - \alpha)$ 的值.

19. 【答案】解: 当 $m = 0$ 时, $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m < 0$ 即为 $x^2 - x < 0$,

即 $x(x - 1) < 0$, 解得 $0 < x < 1$,

故 $B = \{x | 0 < x < 1\}$.

选①: $\frac{4}{x+1} > 1$, 即 $\frac{4}{x+1} - 1 = \frac{3-x}{x+1} > 0$,

即为 $(x + 1)(x - 3) < 0$, 解得 $-1 < x < 3$,

故 $A = \{x | -1 < x < 3\}$;

选②: $x^2 - 2x - 3 < 0$, 解得 $-1 < x < 3$,

故 $A = \{x | -1 < x < 3\}$;

选③: $|x - 1| < 2$ 即 $-2 < x - 1 < 2$, 解得 $-1 < x < 3$,

故 $A = \{x | -1 < x < 3\}$;

可知选①②③时, 均有 $A = \{x | -1 < x < 3\}$,

(1) 因为 $A - B = \{x | x \in A, x \notin B\}$,

则 $A - B = (-1, 0] \cup [1, 3)$.

(2) 由 $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m < 0$,

即 $(x - m)[x - (m + 1)] < 0$, 解得 $B = (m, m + 1)$,

因为 p 是 q 成立的必要不充分条件, 所以 $B \subsetneq A$,

所以 $\begin{cases} m > -1 \\ m + 1 \leq 3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m \geq -1 \\ m + 1 < 3 \end{cases}$,

解得 $-1 \leq m \leq 2$,

故 m 的取值范围为 $[-1, 2]$.

【解析】 本题考查一元二次不等式的解法, 考查分式不等式的解法, 考查充分必要条件, 新定义问题, 属于中档题.

解不等式求出集合 B , 若选①: 利用分式不等式的解法求出集合 A ; 若选②: 利用一元二次不等式的解法求出集合 A ; 若选③: 利用绝对值不等式的解法求出集合 A ;

(1) 由定义求解即可;

(2) 由题意可解得 $B = (m, m + 1)$, 又由因为若 p 是 q 成立的必要不充分条件, 得 $B \subsetneq A$, 求解即可.

20. 【答案】 解: (1) 函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$ ($\omega > 0$) 图象的相邻对称轴与对称中心之间的距离为 $\frac{\pi}{4}$,

故 $T = \pi$, 所以 $\omega = 2$;

故函数 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$;

令 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$), 整理得: $-\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{6}$ ($k \in \mathbb{Z}$);

由于 $x \in [0, \pi]$, 则 $k = 0$ 或 $k = 1$, 即 $x \in [0, \frac{\pi}{6}]$ 和 $[\frac{2\pi}{3}, \pi]$,

故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[0, \frac{\pi}{6}]$ 和 $[\frac{2\pi}{3}, \pi]$.

(2) 由(1)可知函数 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$,

由于 $x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$, 所以 $2x + \frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$, 则 $2\sin(2x + \frac{\pi}{6}) \in [-1, 2]$,

故函数 $f(x)$ 的值域为 $[-1, 2]$.

【解析】 本题考查正弦型函数的性质的应用, 主要考查学生的运算能力和数学思维能力, 属于基础题.

(1) 直接利用函数的性质求出函数 $f(x)$ 的关系式, 进一步求出函数的单调递增区间;

(2) 利用函数的定义域即可得出函数 $f(x)$ 的值域.

21. 【答案】解: (1) \because 定义域为 R , 即 $mx^2 + mx + 2 > 0$ 恒成立,

$$\therefore m = 0, \text{ 或 } \begin{cases} m > 0 \\ \Delta = m^2 - 8m < 0 \end{cases}, \text{ 得 } 0 < m < 8,$$

综上得: $0 \leq m < 8$,

故实数 m 的取值范围 $[0, 8)$;

$$(2) \text{ 因为函数 } y = g[f(x^2)] = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2} = x^2,$$

$$\text{即 } y = x^2,$$

假设存在非负实数 m, n , 定义域为 $[m, n]$, 值域为 $[2m, 2n]$

$$\therefore \begin{cases} m^2 = 2m \\ n^2 = 2n \end{cases} (0 \leq m < n),$$

解得 $m = 0, n = 2$.

所以当 $m = 0, n = 2$ 时, 定义域为 $[0, 2]$, 值域为 $[0, 4]$.

$$(3) \text{ 令 } t = \left(\frac{1}{3}\right)^x \in \left[\frac{1}{3}, 3\right], \text{ 则 } y = t^2 - 2at + 3$$

对称轴为 $t = a$,

$$\text{若 } a \leq \frac{1}{3}, \text{ 则 } h(a) = -\frac{2a}{3} + \frac{28}{9};$$

$$\text{若 } \frac{1}{3} < a < 3, \text{ 则 } h(a) = 3 - a^2;$$

$$\text{若 } a \geq 3, \text{ 则 } h(a) = -6a + 12;$$

$$\text{故 } h(a) = \begin{cases} -\frac{2a}{3} + \frac{28}{9}, & a \leq \frac{1}{3} \\ 3 - a^2, & \frac{1}{3} < a < 3 \\ -6a + 12, & a \geq 3 \end{cases}$$

【解析】本题考查了二次函数函数、函数定义域与值域、函数的最值、指数函数及其性质和对数函数及其性质, 是难题.

(1) 由 $y = g(mx^2 + mx + 2)$ 的定义域为 R , 则 $mx^2 + mx + 2 > 0$ 恒成立, 分 $m = 0$ 和 $m \neq 0$ 两种情况讨论即可;

(2) $y = x^2$ 假设存在, 由题意, 知 $\begin{cases} m^2 = 2m \\ n^2 = 2n \end{cases}$, 解出即可.

(3)令, 令 $t = \left(\frac{1}{3}\right)^x \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$, 则 $y = t^2 - 2at + 3$, 由二次函数性质分类讨论研究最小值即可;

22.【答案】解: (1)由 $t = \sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}$, 得

$$t^2 = 1 + \sin x + 1 - \sin x + 2\sqrt{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = 2 + 2\sqrt{\cos^2 x} = 2 + 2\cos x,$$

$\because x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\therefore \cos x \in [0, 1]$, 故 $t \in [\sqrt{2}, 2]$,

由上得 $\cos x = \frac{t^2 - 2}{2}$, 则 $g(t) = \frac{a}{2}t^2 + t - a$, ($t \in [\sqrt{2}, 2]$);

(2)由(1)得, $g(t) = \frac{a}{2}t^2 + t - a$, ($t \in [\sqrt{2}, 2]$),

函数 $g(t)$ 的对称轴是 $t = -\frac{1}{a} > 0$,

①当 $-\frac{1}{a} > 2$, 即 $-\frac{1}{2} < a < 0$ 时, $g(t)_{\max} = g(2) = a + 2$;

②当 $-\frac{1}{a} < \sqrt{2}$, 即 $a < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $g(t)_{\max} = g(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$;

③当 $\sqrt{2} \leq -\frac{1}{a} \leq 2$, 即 $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq -\frac{1}{2}$ 时, $g(t)_{\max} = g\left(-\frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{2a} - a$,

$$\text{则 } f(x)_{\max} = \begin{cases} a + 2, & -\frac{1}{2} < a < 0 \\ -\frac{1}{2a} - a, & -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq -\frac{1}{2} \\ \sqrt{2}, & a < -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

(3)对区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 内的任意 x_1, x_2 , $|f(x_1) - f(x_2)| \leq m$ 成立, 即 $(|f(x_1) - f(x_2)|)_{\max} \leq m$ 恒成立,

$a = -1$ 时, $g(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t + 1$, $g(t)_{\max} = g(1) = \frac{3}{2}$, $g(t)_{\min} = g(2) = 1$,

在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 内 $f(x)_{\max} = \frac{3}{2}$, $f(x)_{\min} = 1$,

$(|f(x_1) - f(x_2)|)_{\max} = f(x)_{\max} - f(x)_{\min} = \frac{1}{2}$, $m \geq \frac{1}{2}$.

故实数 m 的取值范围: $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

【解析】本题考查了三角函数的化简, 换元法、含参数二次函数的最值、恒成立问题的处理, 属于中档题.

(1)由题可得到 $t^2 = 2 + 2\cos x$, 进而得到 t 的范围, 进而得出函数 $g(t)$;

(2)由函数 $g(t)$ 的对称轴是 $t = -\frac{1}{a} > 0$, 分类讨论其最值, 从而得到函数 $f(x)$ 的最大值;

(3)由题转化为 $(|f(x_1) - f(x_2)|)_{\max} \leq m$ 恒成立. 求出 $f(x)_{\max}$, $f(x)_{\min}$ 即可得出结果.