江苏省仪征中学 2022-2023 学年度高一第一学期数学周练（9）2022.11.27

班级____________学号____________姓名___________评价

一、选择题.本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1、已知集合 $A=\{x|-2<x<1\}$，$B=\{x|0\le x\le 2\}$，则 $A\cup B=$　　　（　　）

A．$\{x|0\le x<1\}$　　B．$\{x|-2<x\le 2\}$　　C．$\{x|1<x\le 2\}$　　D．$\{x|0<x<1\}$

2、给出下列四个结论：①-15°角是第四象限角；②$185^\circ$角是第三象限角；③$475^\circ$角是第二象限角；

④-350°角是第一象限角．其中正确的个数为(　)

A.　1　　B.　2　　C.　3　　D.　4

3、“$x>2$”是“$x^2-2x>0$”的　　　（　　）

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件　C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

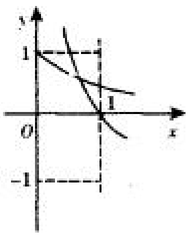
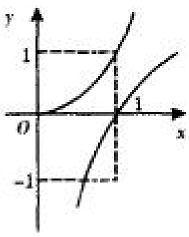
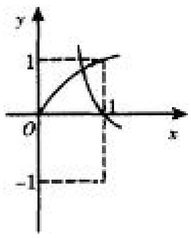
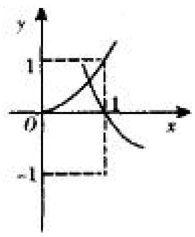
4、已知 $f(x)=\begin{cases}2x,x>0\\ f(x+1),x\le 0\end{cases}$，则 $f\left(\frac{4}{3}\right)+f\left(-\frac{4}{3}\right)$ 的值等于　　　（　　）

A. 4　　B. –4　　C.2　　D. –2

5、若 $x>1$，则 $y=\frac{x^2+3}{x-1}$ 的最小值是　　　（　　）

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

6、在同一直角坐标系中，函数 $f(x)=x^a(x\ge 0)$，$g(x)=-\log_a x$的图象可能是(　)

A.  B.  C.  D. 

7、设定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足：$f(-x)=2-f(x)$，若函数 $g(x)=x^3-x+1$ 与 $f(x)$ 的图像的交点分别为 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$，则 $x_1+y_1+x_2+y_2+x_3+y_3=$　　　（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

8、已知函数 $f(x)=\begin{cases}\left|\log_{\frac{1}{2}}x\right|, x>0,\\ x^2+2\sqrt{2}x+3, x\le 0,\end{cases}$ 且 $x_1<x_2<x_3<x_4$时，$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=f(x_4)$, 则 $\frac{x_4}{x_3}+\frac{4\sqrt{2}}{x_1x_3^2+x_2x_3^2}$ 的取值范围为 (　)

A.　$(\frac{1}{4},8]$　　B.　$[2,+\infty)$　　C.　$(4,+\infty)$　　D.　$[-64,-4)$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9、下列四个命题：其中正确的命题是 （　　）

A. 函数 $f(x)=2x^2+2x+3$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增　　B. $y=1+x$ 和 $y=\sqrt{1+x^2}$ 表示同一个函数

C. 当 $a>b>c$ 时，则有 $ab>ac$ 成立　D. 若二次函数 $f(x)=ax^2+bx+2$ 的图象与 x 轴没有交点，则 $b^2-8a<0$ 且 $a>0$

10、对于函数 f：$A\to B$，若 $a\in A$，则下列说法正确的是 （　　）

A．$f(a)\in B$　　B．$f(a)$ 有且只有一个

C．若 $f(a)=f(b)$，则 $a=b$　　D．若 $a=b$，则 $f(a)=f(b)$

11、已知 $a>0$，$b>0$，且 $4a+b=ab$，则下列不等式中正确的是 （　　）

A．$ab\geq 16$　　B．$a-b<0$　　C．$2a+b\geq 6+4\sqrt{2}$　　D．$\frac{1}{a^2}+\frac{16}{b^2}\geq\frac{1}{2}$

12、设函数 $f(x)=x^2-4x+3$，$g(x)=ax-2$（$a\in R$），则下列说法正确的有（　　）

A．函数 $y=\sqrt{f(x)}$ 的单调递减区间为 $(-\infty,\ 2)$　　B．若函数 $y=f(x)+g(x)$ 为偶函数，则 $a=4$

C．若函数 $y=\sqrt{f(x)+g(x)}$ 定义域为 R，则 $a\in[2,\ 6]$　D．$\forall x_1\in[0,\ 3]$，$\exists x_2\in[1,\ 2]$，使得 $f(x_1)\geq g(x_2)$，则 $a\leq 1$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13、已知 $y=f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x-1$，则 $x<0$ 时，$f(x)=$____▲____.

14、函数 $f(x)=\log_a(x^2-ax+12)$ 在 $(2,3)$ 单调递减，实数 a 的取值范围是 _____.

15、已知 $a>0$，$b>0$，$a+b=1$，则 $\frac{1}{a}+\frac{a}{b}$ 的最小值=____▲____.

16、已知 $f(x)=x^2+2ax-1$，对任意 x_1、$x_2\in[1，+\infty)$ 且 $x_1<x_2$，恒有 $x_2f(x_1)-x_1f(x_2)<a(x_1-x_2)$ 成立，则实数 a 的取值范围是____▲____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题 10 分）

已知 p：$\forall x>0$，$x^2-ax+\frac{1}{4}\geq 0$，q：关于 x 的方程 $2x^2+(a-1)x-a(a+1)=0$ 的实数根都大于 -2.

（1）若 q 是真命题，求 a 的取值范围;

（2）若 p 和 q 一个是真命题，一个是假命题，求 a 的取值范围.

18、（本小题 12 分）

已知一扇形的圆心角为α $(0<\alpha<2\pi)$，所在圆的半径为R.

(1)若$\alpha=\frac{\pi}{2}$，$R=10$，求扇形的弧长l及该弧所在的弓形的面积S；

(2)若扇形的周长为定值C $(C>0)$，求该扇形的面积M的最大值，并指出此时α的值.

19、（本小题 12 分）

已知函数　$f(x)=log_2\frac{1-x}{1+x}$.

(1)求函数的定义域；

(2)判断函数的奇偶性，并给予证明；

(3)求不等式　$f(x)>1$的解集.

20、（本小题 12 分）

甲、乙两位消费者同时两次购买同一种物品，分别采用两种不同的策略，甲的策略是不考虑物品价格的升降，每次购买这种物品的数量一定；乙的策略是不考虑物品价格的升降，每次购买这种物品所花的钱数一定．设甲每次购买这种物品的数量为 m，乙每次购买这种物品所花的钱数为 n.

（1）若两次购买这种物品的价格分别为 6 元，4 元，求甲两次购买这种物品平均价格和乙两次购买这种物品平均价格分别为多少；

（2）设两次购买这种物品的价格分别为 p_1 元，p_2 元（$p_1>0$，$p_2>0$，且 $p_1\neq p_2$），甲两次购物的平均价格记为 Q_1，乙两次购物的平均价格记为 Q_2．通过比较 Q_1，Q_2 的大小，说明问甲、乙谁的购物策略比较经济合算.

21.（本小题 12 分）

已知函数$f(x)= a\cdot 2^x-2^{1-x}$是定义在R上的奇函数.

(1)求实数a的值；

(2)求不等式$f[f(x)-2]>3$ 的解集；

(3)若关于x的不等式$f(x)>\frac{k}{2^{x-1}}+2$ 恒成立，求实数k的取值范围.

22.（本小题 12 分）

已知函数$f(x)=\log_a(x-\frac{a}{2})+\log_a(x-a)(a>0$且$a\neq 1)$.

(1)当$a=2$时，解不等式$f(x)>1$；

(2)是否存在实数a，使得当$x\in[m,n]$时，函数$f(x)$的值域为$[\log_a n,\log_a m]$？若存在，求实数a的值；若不存在，请说明理由.

江苏省仪征中学 2022-2023 学年度高一第一学期数学周练（9）2022.11.27

班级____________学号____________姓名____________评价

一、选择题.本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1、已知集合 $A=\{x|-2<x<1\}$，$B=\{x|0\le x\le 2\}$，则 $A\cup B=$ （　　）

A．$\{x|0\le x<1\}$　　B．$\{x|-2<x\le 2\}$　　C．$\{x|1<x\le 2\}$　　D．$\{x|0<x<1\}$

B

2、给出下列四个结论：①-15°角是第四象限角；②$185^\circ$角是第三象限角；③$475^\circ$角是第二象限角；

④-350°角是第一象限角．其中正确的个数为(　)

A.　1　　B.　2　　C.　3　　D.　4

D

3、“$x>2$”是“$x^2-2x>0$”的 （　　）

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件　C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

A

4、已知 $f(x)=\begin{cases}2x, x>0\\ f(x+1), x\le 0\end{cases}$，则 $f\left(\frac{4}{3}\right)+f\left(-\frac{4}{3}\right)$的值等于 （　　）

A. 4　　B. –4　　C.2　　D. –2

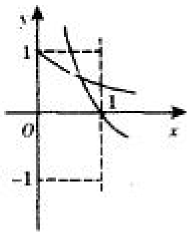
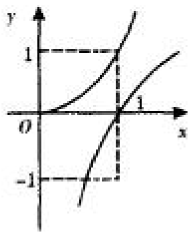
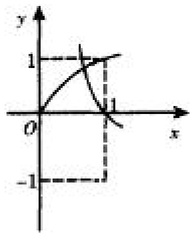
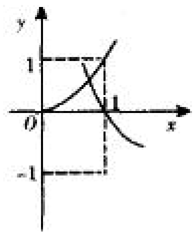
A

5、若 $x>1$，则 $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ 的最小值是 （　　）

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

D

6、在同一直角坐标系中，函数 $f(x)=x^a(x\ge 0)$，$g(x)=-\log_a x$的图象可能是(　)

A.  B.  C.  D. 

D

7、设定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足：$f(-x)=2-f(x)$，若函数 $g(x)=x^3-x+1$ 与 $f(x)$ 的图像的交点分别为 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$，则 $x_1+y_1+x_2+y_2+x_3+y_3=$ （　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

C

8、已知函数 $f(x)=\begin{cases}\left|\log_{\frac{1}{2}}x\right|, x>0,\\ x^2+2\sqrt{2}x+3, x\leqslant 0,\end{cases}$ 且 $x_1<x_2<x_3<x_4$时，$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=f(x_4)$，则 $\dfrac{x_4}{x_3}+\dfrac{4\sqrt{2}}{x_1x_3^2+x_2x_3^2}$ 的取值范围为(　)

A.　$(\frac{1}{4},8]$　　B.　$[2,+\infty)$　　C.　$(4,+\infty)$　　D.　$[-64,-4)$

D

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9、下列四个命题：其中正确的命题是（　　）

A. 函数 $f(x)=2x^2+2x+3$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增　　B. $y=1+x$ 和 $y=\sqrt{1+x^2}$ 表示同一个函数

C. 当 $a>b>c$ 时，则有 $ab>ac$ 成立　D. 若二次函数 $f(x)=ax^2+bx+2$ 的图象与 x 轴没有交点，则 $b^2-8a<0$ 且 $a>0$

AD

10、对于函数 f：$A\to B$，若 $a\in A$，则下列说法正确的是（　　）

A．$f(a)\in B$　　B．$f(a)$ 有且只有一个

C．若 $f(a)=f(b)$，则 $a=b$　　D．若 $a=b$，则 $f(a)=f(b)$

ABD

11、已知 $a>0$，$b>0$，且 $4a+b=ab$，则下列不等式中正确的是（　　）

A．$ab\geq 16$　　B．$a-b<0$　　C．$2a+b\geq 6+4\sqrt{2}$　　D．$\frac{1}{a^2}+\frac{16}{b^2}\geq\frac{1}{2}$

ACD

12、设函数 $f(x)=x^2-4x+3$，$g(x)=ax-2$（$a\in R$），则下列说法正确的有（　　）

A．函数 $y=\sqrt{f(x)}$ 的单调递减区间为 $(-\infty,\ 2)$　　B．若函数 $y=f(x)+g(x)$ 为偶函数，则 $a=4$

C．若函数 $y=\sqrt{f(x)+g(x)}$ 定义域为 R，则 $a\in[2,\ 6]$　D．$\forall x_1\in[0,\ 3]$，$\exists x_2\in[1,\ 2]$，使得 $f(x_1)\geq g(x_2)$，则 $a\leq 1$

BCD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13、已知 $y=f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x-1$，则 $x<0$ 时，$f(x)=$____▲____. $x+1$

14、函数 $f(x)=\log_a(x^2-ax+12)$ 在 $(2,3)$ 单调递减，实数 a 的取值范围是 _____.

$(0,1)\cup[6,7]$

15、已知 $a>0$，$b>0$，$a+b=1$，则 $\frac{1}{a}+\frac{a}{b}$ 的最小值=____▲____.3

16、已知 $f(x)=x^2+2ax-1$，对任意 x_1、$x_2\in[1,+\infty)$ 且 $x_1<x_2$，恒有 $x_2f(x_1)-x_1f(x_2)<a(x_1-x_2)$ 成立，则实数 a 的取值范围是____▲____. $a\leq 2$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.已知 p：$\forall x>0$，$x^2-ax+\frac{1}{4}\geq 0$，q：关于 x 的方程 $2x^2+(a-1)x-a(a+1)=0$ 的实数根都大于 -2.

（1）若 q 是真命题，求 a 的取值范围；

（2）若 p 和 q 一个是真命题，一个是假命题，求 a 的取值范围.

解：（1）根据题意，由 $2x^2+(a-1)x-a(a+1)=0$，即 $[2x-(a+1)](x+a)=0$，得 $x_1=\frac{a+1}{2}$，$x_2=-a$.

若 q 是真命题，则 $\begin{cases}\frac{a+1}{2}>-2,\\ -a>-2,\end{cases}$ 解得 $-5<a<2$．故 a 的取值范围是（-5，2）……………（6 分）

（2）若 p 是真命题，则 $x^2-ax+\frac{1}{4}\geq 0$，即 $a\leq x+\frac{1}{4x}$.

因为 $x>0$，则有 $x+\frac{1}{4x}\geq 1$，当且仅当 $x=\frac{1}{2}$ 时等号成立，故 $a\leq 1$.

因为 p 和 q 一真一假，所以 $\begin{cases}a\leq 1,\\ a\leq -5\text{ 或 }a\geq 2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a>1,\\ -5<a<2\end{cases}$．解得 $a\leq-5$ 或 $1<a<2$，

故 a 的取值范围为 $\{a|a\leq-5$ 或 $1<a<2\}$．　　……………（12 分）

18、

已知一扇形的圆心角为α $(0<\alpha<2\pi)$，所在圆的半径为R.

(1)若$\alpha=\frac{\pi}{2}$，$R=10$，求扇形的弧长l及该弧所在的弓形的面积S；

(2)若扇形的周长为定值C $(C>0)$，求该扇形的面积M的最大值，并指出此时α的值.

解：(1)设弧长为l，弓形面积为$S_{弓}$，则：$\alpha=90°=\frac{\pi}{2}$，$R=10$，

$l=\frac{\pi}{2}\times 10=5\pi$，

$S_{弓}=S_{扇}-S_{三角形}=\frac{1}{2}\times 5\pi\times 10-\frac{1}{2}\times 10^2=25\pi-50$.

(2)扇形周长$C=2R+l=2R+\alpha R$，

$\therefore R=\frac{C}{2+\alpha}$，

$\therefore S_{扇}=\frac{1}{2}\alpha\cdot R^2=\frac{1}{2}\alpha(\frac{C}{2+\alpha})^2=\frac{C^2}{2}\cdot\frac{1}{4+\alpha+\frac{4}{\alpha}}\leq\frac{C^2}{16}$.

当且仅当$\alpha^2=4$，即$\alpha=2$时，扇形面积有最大值$\frac{C^2}{16}$.

【解析】本题主要考查了三角形的面积公式，弧长公式，扇形的面积公式，基本不等式的应用，考查了转化思想，属于基础题.

(1)设弧长为l，弓形面积为$S_{弓}$，利用三角形的面积公式，弧长公式即可计算得解.

(2)扇形周长$C=2R+l=2R+\alpha R$，可得$R=\frac{C}{2+\alpha}$，利用扇形的面积公式，基本不等式即可求解.

19、已知函数 $f(x)=\log_2\frac{1-x}{1+x}$.

(1)求函数的定义域；

(2)判断函数的奇偶性，并给予证明；

(3)求不等式 $f(x)>1$的解集.

【答案】

解：(1)真数部分大于零，即解不等式$\frac{1-x}{1+x}>0$，解得$-1<x<1$，

函数的定义域为$(-1,1)$.

(2)函数$f(x)$为奇函数，

证明：由第一问函数的定义域为$(-1,1)$，

$f(-x)=\log_2\frac{1+x}{1-x}=\log_2(\frac{1-x}{1+x})^{-1}=-f(x)$，

所以函数$f(x)$为奇函数.

(3)解不等式$f(x)>1$，即$\log_2\frac{1-x}{1+x}>1$，

即$\log_2\frac{1-x}{1+x}>\log_2 2$，

从而有$\begin{cases}-1<x<1\\ \frac{1-x}{1+x}>2\end{cases}$，所以$-1<x<-\frac{1}{3}$.

不等式$f(x)>1$的解集为$\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$.

【解析】本题主要考查对数函数的定义域，函数的奇偶性的判断，解分式不等式，属于中档题.

(1)由函数$f(x)$的解析式可得$\frac{1-x}{1+x}>0$，即$(x+1)(x-1)<0$，由此求得函数的定义域.

(2)由于函数的定义域关于原点对称，且满足$f(-x)=-f(x)$，可得函数为奇函数.

(3)由$f(x)>1$可得$\frac{1-x}{1+x}>2$，由此求得x的取值范围.

………………（12 分）

20、甲、乙两位消费者同时两次购买同一种物品，分别采用两种不同的策略，甲的策略是不考虑物品价格的升降，每次购买这种物品的数量一定；乙的策略是不考虑物品价格的升降，每次购买这种物品所花的钱数一定．设甲每次购买这种物品的数量为 m，乙每次购买这种物品所花的钱数为 n.

（1）若两次购买这种物品的价格分别为 6 元，4 元，求甲两次购买这种物品平均价格和乙两次购买这种物品平均价格分别为多少；

（2）设两次购买这种物品的价格分别为 p_1 元，p_2 元（$p_1>0$，$p_2>0$，且 $p_1\neq p_2$），甲两次购物的平均价格记为Q_1，乙两次购物的平均价格记为Q_2．通过比较Q_1，Q_2的大小，说明问甲、乙谁的购物策略比较经济合算．

解：（1）设甲每次购买这种物品的数量为m，乙每次购买这种物品所花的钱数为n，

所以甲两次购买这种物品平均价格为：$\frac{6m+4m}{m+m}=5$，乙两次购买这种物品平均价格为：$\frac{2n}{\frac{n}{6}+\frac{n}{4}}=\frac{24}{5}$；…………（4 分）

（2）设甲两次购物时购物量均为m，则两次购物总花费为p_1m+p_2m，

购物总量为$2m$，平均价格为$Q_1=\frac{p_1m+p_2m}{2m}=\frac{p_1+p_2}{2}$.

设乙两次购物时用去的钱数均为n，则两次购物总花费$2n$，购物总量为$\frac{n}{p_1}+\frac{n}{p_2}$，

平均价格为$Q_2=\frac{2n}{\frac{n}{p_1}+\frac{n}{p_2}}=\frac{2p_1p_2}{p_1+p_2}$，$\therefore Q_1=\frac{p_1+p_2}{2}$，$Q_2=\frac{2p_1p_2}{p_1+p_2}$.

$\because p_1\neq p_2$，$\therefore Q_1-Q_2=\frac{p_1+p_2}{2}-\frac{2p_1p2}{p_1+p_2}=\frac{(p_1-p_2)^2}{2(p_1+p_2)}>0$，$\therefore Q_1>Q_2$，因此可知，第二种购物方式比较划算．…（12 分）

21、已知函数 $f(x)=a\cdot 2^x-2^{1-x}$是定义在 R上的奇函数.

(1)求实数 a的值；

(2)求不等式 $f[f(x)-2]>3$的解集；

(3)若关于 x的不等式 $f(x)>\frac{k}{2^{x-1}}+2$恒成立，求实数 k的取值范围.

【答案】

解：(1)因为$f(x)=a\cdot 2^x-2^{1-x}$是定义在R上的奇函数，所以$f(-x)+f(x)=0$，

即$a\cdot 2^{-x}-2^{1+x}+a\cdot 2^x-2^{1-x}=0$，即$(a-2)(2^x+\frac{1}{2^x})=0$，

因为$2^x+\frac{1}{2^x}>0$，所以$a-2=0$，所以$a=2$(经检验，$a=2$符合题意).

(2)由(1)得$f(x)=2^{1+x}-2^{1-x}$，

因为$y=2^{1+x}$与$y=-2^{1-x}$在R上均为增函数，所以$f(x)=2^{1+x}-2^{1-x}$在R上为增函数，

又$f(1)=3$，所以不等式$f[f(x)-2]>3$即为$f[f(x)-2]>f(1)$，

所以$f(x)-2>1$，即$f(x)>3=f(1)$，

所以$x>1$，

所以不等式$f[f(x)-2]>3$的解集为$(1,+\infty)$;

(3)因为关于x的不等式$f(x)>\frac{k}{2^{x-1}}+2$恒成立，

即$2^{1+x}-2^{1-x}>\frac{k}{2^{x-1}}+2$恒成立，

所以$k<2^{2x}-2^x-1$恒成立，

所以$k<(2^{2x}-2^x-1)_{\min}$，

因为$2^{2x}-2^x-1=(2^x-\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}$,

所以当$2^x=\frac{1}{2}$，即$x=-1$时，$2^{2x}-2^x-1$取得最小值$-\frac{5}{4}$,

所以$k<-\frac{5}{4}$，即实数k的取值范围是$(-\infty,-\frac{5}{4})$.

【解析】本题主要考查了函数的奇偶性、利用函数的单调性解不等式、不等式恒成立问题，涉及指数运算及二次函数的最值，属于中档题.

(1)根据函数为奇函数，由$f(-x)+f(x)=0$求出a;

(2)判定函数的单调性，再利用单调性解不等式即可；

(3)先将问题转化为$k<2^{2x}-2^x-1$恒成立，再利用二次函数的性质求$2^{2x}-2^x-1$的最小值即可.

22. 已知函数　$f(x)=\log_a(x-\frac{a}{2})+\log_a(x-a)(a>0$且　$a\neq 1)$.

(1)当　$a=2$时，解不等式　$f(x)>1$；

(2)是否存在实数　a，使得当　$x\in[m,n]$时，函数　$f(x)$的值域为　$[\log_a n,\log_a m]$？若存在，求实数　a的

值；若不存在，请说明理由．

【答案】

解：(1)当$a=2$时，$f(x)=\log_2(x-1)+\log_2(x-2)=\log_2[(x-2)(x-1)]$，

由$f(x)>1$，可得$(x-2)(x-1)>2$且$x-2>0$，$x-1>0$，

即$x^2-3x>0$，$x>2$，

解得$x>3$，

故不等式$f(x)>1$的解集为$(3,+\infty)$．

(2)$f(x)=\log_a(x-\frac{a}{2})+\log_a(x-a)$，

则$x-\frac{a}{2}>0$且$x-a>0$，所以$x>a$，即$f(x)$的定义域为$(a,+\infty)$，

由题设，$\begin{cases} n>m>a \\ \log_a m>\log_a n \end{cases}$，故$0<a<1$．

$f(x)=\log_a[(x-\frac{a}{2})(x-a)]$，

其中$u=(x-\frac{a}{2})(x-a)$在$x\in[m,n]$上单调递增，$y=\log_a u$递减，

所以$f(x)$在$x\in[m,n]$上递减，故$\begin{cases} log_a\left[\left(m-\frac{a}{2}\right)(m-a)\right]=log_a m \\ log_a\left[\left(n-\frac{a}{2}\right)(n-a)\right]=log_a n \end{cases}$，

所以$\begin{cases} \left(m-\frac{a}{2}\right)(m-a)=m \\ \left(n-\frac{a}{2}\right)(n-a)=n \end{cases}$，

即m，n是关于x的方程$\left(x-\frac{a}{2}\right)(x-a)=x$的两个不同的实数根，

所以$g(x)=x^2-\left(\frac{3a}{2}+1\right)x+\frac{a^2}{2}$在$(a,+\infty)$上有$m$，$n$两个不同的零点，

而$g(x)$的图象开口向上且$g(a)=-a<0$，显然在$(a,+\infty)$上不可能存在两个零点，

综上，不存在实数a使题设条件成立．

【解析】本题主要考查对数不等式的解法，函数的定义域及单调性的应用，二次函数的性质，属于中档题．
(1)把$a=2$代入，然后结合对数函数的单调性即可求解不等式；
(2)由题设可得$0<a<1$，进而将问题转化为$g(x)=x^2-\left(\frac{3a}{2}+1\right)x+\frac{a^2}{2}$在$(a,+\infty)$上有$m$，$n$两个不同的零点，利用二次函数的性质即可判断存在性．