基于数学抽象的概念形成:模型与案例①

刘春艳 冯启磊②

(北京教育学院数学系 100044)

1 问题提出

《普通高中数学课程标准(2017年版)》(以下简称《课标》)提出,数学学科核心素养是数学课程目标的集中体现.其中数学抽象位于六大学科核心素养之首,是数学的基本思想,是形成理性思维的重要基础.从数学内容来看,数学源于对现实世界的抽象,概念是数学的核心内容,因此,获得数学概念是数学抽象的主要表现之一,数学概念的形成也是发展学生数学抽象的重要载体.在实际教学中,如何从情境中抽象出数学概念,既是重点也是难点.为此,很多学者开展了大量研究.

关于概念学习,杜宾斯基(Ed Dubinsky)等人提出APOS理论,强调学习者在学习数学概念时要经历4个心理建构阶段,即操作(Action)、过程(Process)、对象(Object)、图式(Scheme).奥苏贝尔(D. P. Ausubel)提出与概念形成的最高发展形式有关的心理过程,大致有八个环节.结合此结论,曹才翰与章建跃两位学者提出了概念形成的过程模式(如图1).

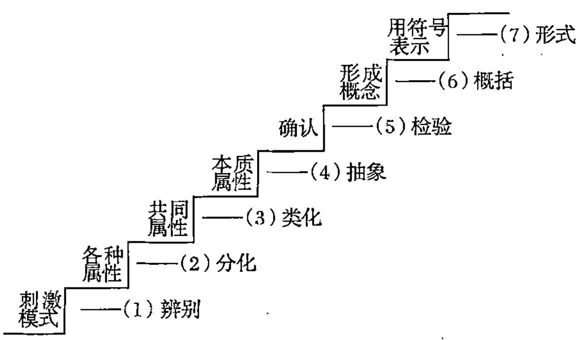


图1 概念形成的一般过程

(曹才翰,章建跃,2006)

为了更精确地刻画数学领域中抽象性的含义,徐利治教授给出了弱抽象、强抽象和广义抽象的概念,并指出弱抽象的过程依据"特征分离概括化原则",强抽象的过程依据"关系定性特征化原则"[1].对于具体数学概念的抽象过程,史宁中教授根据抽象程度的不同,分为三个阶段,或者说三个层次:一是简约阶段,把握事物关于数量或图形的本质,把繁杂问题简单化,给予清晰表达;二是符号阶段,去掉具体内容,利用符号和关系术语,表述已简约化的事物;三是普适阶段,通过假设和推理,建立法则或者模型,能在一般意义上描述一类事物的特征或规律.[2]李昌官老师按照学生学习时认知的先后顺序,把数学抽象分为感知与识别、分类与概括、想象与建构、定义与表征、系统化与结构化5个阶段.

上述相关理论和结论,对于一般意义上的数学概念的抽象过程具有指导意义.徐利治教授对每类抽象给出了工作原则,史宁中教授提出的三个阶段,指明了数学概念抽象过程的基本框架,在具体操作时都需要细化;曹才翰和章建跃等学者给出的认知过程具有一种等级结构或顺序结构.但是在学习具体概念时,由于数学概念的复杂性和不同阶段学生的差异等原因,学生认知过程是否一定遵循线性顺序?教学中如何更加清晰地引导学生经历数学抽象的过程,建构数学概念呢?以上问题都需要进一步探讨.

2 基于数学抽象的概念形成模型

在概念教学中,数学概念是研究对象,教学流

① 本文为北京教育学院卓越计划"学科核心素养导向的高中数学教学研究"研究成果.教育部人文社科研究规划基金项目:高中数学核心素养理论框架的实证及实践研究(19YJA880009)研究成果.

② 本文通讯作者

程与认知过程紧密相连. 首先,要对数学研究对象的特点进行分析. 一般地,数学概念来源于两方面:一是对客观世界中的数量关系和空间形式的直接抽象;二是在已有数学理论上的逻辑建构[3]. 相应地,数学概念分为两类:一类是对现实对象或关系的直接抽象而成的概念,如三角形的概念,定义包含了组成要素(三条线段)和要素之间的位置关系(首尾顺次相接);另一类是纯数学抽象得到的,是抽象逻辑思维的产物,如三角形的中线概念,是在"三角形"基础上生成的,具有主从关系. 三角形的中线定义中的逻辑关系是通过临近的属概念(三角形)加上种差(连接顶点与对边中点的线段)来体现的. 因此,数学概念是由要素和要素之间的逻辑关系构成的,概念形成过程"实质上是抽象出某一类对象或事物的共同本质特征的过程"[4],也就是抽象出概念包含的要素,以及要素之间逻辑关系的过程.

其次,基于认知心理学关于概念学习的相关理论,在大量课堂观察与访谈分析的基础上,我们发现学生的认知过程非常复杂. 在实际教学中,教师需要根据学生的具体表现,或重复已有的过程,或转换表达方式,或补充新的实例等等,概念的建构过程并非一定遵循线性关系. 基于以上分析,我们建构了基于数学抽象的概念形成模型,如图 2.

2.1 简约阶段

简约阶段的操作过程,就是对于情境中的原型进行识别,把某个或某类数学特性分离出来,也就是教学中的概念引入. 通过具体的、直观的、典型的、丰富的案例,结合长时记忆中的相关信息,在情境中辨认出数学特性,舍弃非数学的特征和属性,形成进一步研究的"范本",这是概念形成的基础. 如关于多面体和旋转体的概念,教材中提供了纸杯、纸箱、腰鼓、金字塔、茶叶盒、篮球、铅锤等大量生活中物体的图片,请学生描述它们的形状,这些情境可以和后续概念(如棱柱、棱锥、线面的平行与垂直等)的理解与应用相呼应,为概念的系统化做一些铺垫.

2.2 符号阶段

符号阶段是对简约阶段识别出的要素,通过分析与建构、归纳与概括、定义与表征的认知过程,得到概念的定义和名称等,也就是教学中的概念形成.

(1)分析与建构

分析是将材料分解成它的组成部分,并确定各部分之间的相互关系,以及各部分与总体结构之间的关系[5]. 建构是通过数学内在逻辑建立起系统的、内在一致的关系,使其构成一个整体. 对于每个情境中识别出的要素,通过观察、比较等进行区分,选择与概念相关的、重要的、关键的要素,进一步明确需要研究的问题,也就是从哪些角度建立要素之间的逻辑关系.

对于代数的相关概念主要是从数量关系进行

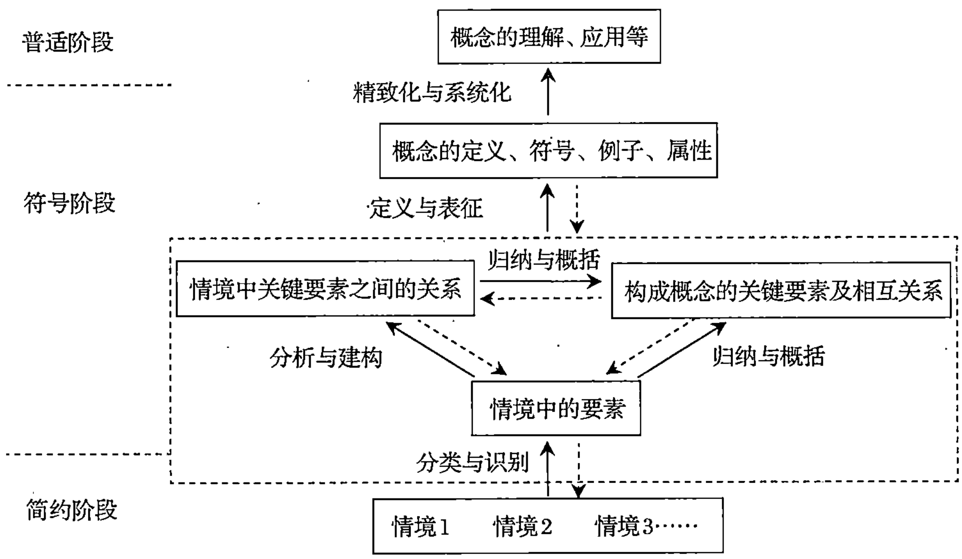


图 2 基于数学抽象的概念形成模型

分析，如等差数列的概念，通过代数运算进行分析；对于几何的相关概念主要从图形关系进行分析，如棱柱的概念，通过观察每个面的形状和两个面之间的位置关系进行分析；对于函数的相关概念主要从对应关系进行分析，如函数的单调性，分析两个变量间的大小关系，通过对应关系得到的两个函数值之间大小关系是否具有规律性.

(2)归纳和概括

先对不同情境中分析得到的要素及其之间的关系进行比较，得到共同特征，这也是知觉表象阶段的感性归纳和概括. 再把共同特征推广到范围更广的包含研究对象的同类事物中，实现从个别到一般的过程. 揭示事物本质特征与联系的过程，是在头脑中进行的思维水平的概括. 比如等差数列的概念，在对每个情境中的数列分别进行运算的基础上，进行归纳和概括发现取值规律，再一般化得到“每一项与前一项的差都等于同一个常数”. 分析和构建、归纳和概括是符号化表达的重要基础.

(3)定义和表征

定义有两种，一种是描述性定义，一种是说明性定义. 比如集合的概念就是无法说明的基础性概念，只能描述性定义；有理数的概念鉴于初中学生的理解水平，只能采用描述性定义；而函数的概念是说明性定义，揭示两个变量之间的对应关系. 对于描述性定义主要以文字语言的形式进行表达. 对于说明性定义需要揭示事物本质的逻辑关系，需要用严谨的数学语言表示概念的要素、要素之间的相互联系相互制约的关系，如高中学习函数的概念时用“集合—对应”的语言进行表达.

在概念的形成过程中，上述认知过程之间不是严格的线性顺序结构，常常是相互交叠和多次反复. 比如，在定义的表征过程中，常常需要回到情境中，结合具体情境解释抽象的定义，帮助学生建立抽象的数学符号与概念本质内容之间的联系. 另外，不同概念的认知过程各有侧重，比如对于描述性定义，更关注对情境中识别的要素进行归纳与概括.

2.3 普适阶段

给概念下定义之后，进入概念的精致化与系统化阶段. 通过对正例和反例的辨析、解释，以及运用概念解决问题，实质上是在一个更大范围内对概念进行检验和修正，进一步促进学生对概念本质属性的理解，建立此概念与已经熟悉的相关概念之间的联系，逐步将新概念纳入已有的认知结构中，形成新的结构体系. 这个过程在后续的学习中持续进行，如通过判断两个函数是否相同等问题，提升对函数概念的理解，通过具体函数、从函数观点认识方程和不等式、函数应用等内容，理解函数是现代数学最基本的概念，是描述客观世界中变量关系和规律的最为基本的数学语言和工具，体会函数是贯穿高中数学课程的主线.

3 基于数学抽象的概念形成模型的教学案例——高中“函数概念”

函数概念强调了三个方面：函数是实数集合 A 与 B 间的对应关系；对于实数集合 A 中的元素是处处定义的(即任意性)；对于实数集合 B 中的元素是单值定义的(即唯一性). 这三个方面就构成了函数的本质属性. 常见的函数三种表示方法只是对应关系的表现形式，形式不是函数的本质，符号也不是函数的本质，比如同一个函数既可以用 $f(x)$ 表示，也可以用 $g(t)$ 表示. 根据函数的本质属性，聚焦函数概念的三要素，教学的主要过程如下：

3.1 概念的引入

在初中学习中，函数是如何定义的？依据初中函数的定义，请思考：$y=1$ 是函数吗？函数 $y=x$ 与 $y=\frac{x^2}{x}$ 相同吗？[6]

设计意图 复习回顾初中函数的概念，同时体会到进一步研究函数概念的必要性. 初中是从运动变化的角度，用两个变量之间的依赖关系来描述函数的. 对于“$y=1$ 是函数吗?”，有的学生认为解析式中没有自变量，所以 $y=1$ 不是函数；有的学生认为 y 是常数，不是变量，所以 $y=1$ 不是函数. 对于判断两个函数是否相同，学生没有任何经验，初中学习的是三类具体函数，很多学生对此无从下手. 通过这些问题引发学生的认知冲突，引入研究对象.

3.2 概念的形成

情境1：某高速列车加速到300km/h后保持匀速运行半小时.[6]

问题1.1：这段时间内，列车行进的路程与运行时间之间是函数关系吗？为什么？

问题 1.2：这段时间内，设列车行进的路程为 S（单位：km），运行时间为 t（单位：h），S 与 t 之间的关系如何表示？

问题 1.3：列车匀速运行 1 小时前进了多少 km？为什么？

问题 1.4：列车运行时间 t 的取值范围如何表示？S 的取值范围呢？S 与 t 之间是如何对应的？

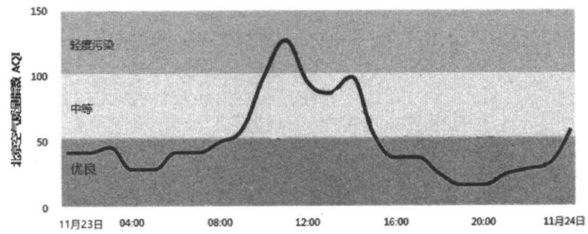
情境 2：某电气维修公司要求工人每周工作至少 1 天，至多不超过 6 天. 如果公司确定的工资标准是每人每天 300 元，而且每周付一次工资. [6]

问题 2.1：一个工人的工资是他工作天数的函数关系吗？为什么？

问题 2.2：设某工人的工作天数为 d，工资为 w 元，w 与 d 之间的关系如何表示？

问题 2.3：工作天数 d 的取值范围如何表示？w 的取值范围呢？w 与 d 之间是如何对应的？

情境 3：右图是北京市 2016 年 11 月 23 日的空气质量指数（Air Quality Index，简称 AQI）变化图. [6]



问题 3.1：北京市 2016 年 11 月 23 日的空气质量指数与这一天内任意时刻 t 之间是函数关系？为什么？

问题 3.2：如何确定这一天内任意时刻的空气质量指数？

问题 3.3：请仿照前面的方法，描述 I 与 t 之间的对应关系.

情境 4：国际上常用恩格尔系数 r（$r=\frac{\text{食物支出金额}}{\text{总支出金额}}$）反映一个地区人民生活质量的高低，恩格尔系数越低，生活质量越高. 表 1 是我国某省城镇居民恩格尔系数变化情况，从中可以看出，该省城镇居民的生活质量越来越高. [6]

表 1 我国某省城镇居民恩格尔系数变化情况

年份 y	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
恩格尔系数 r(%)	36.69	36.81	38.17	35.69	35.15	33.53	33.87	29.89	29.35	28.57

问题 4.1：恩格尔系数 r 是年份 y 的函数吗？为什么？

问题 4.2：如何知道该城镇居民某一年的恩格尔系数？

问题 4.3：请仿照前面的方法，描述 r 与 y 之间的对应关系.

问题 5：根据上述分析，进行归纳概括.

问题 5.1：抛开实际背景，上述四个实例中的函数都有哪些共同特征？

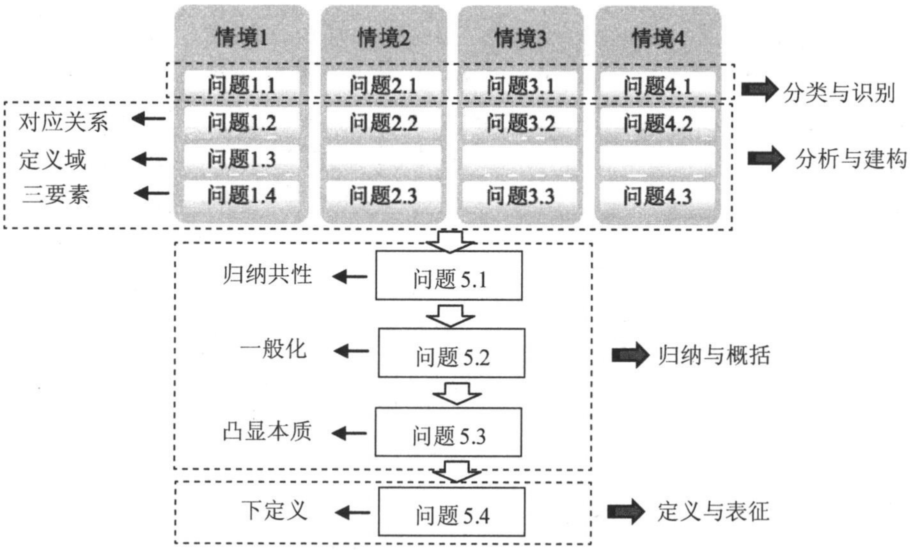
问题 5.2：这些共同特征是否适用一般函数？

问题 5.3：由此能否概括出函数概念的本质特征？

问题 5.4 尝试利用“集合—对应”的语言给函数下个定义.

预设：学生下定义出现困难时，(1)先用口头语言描述函数的三要素，再进行符号化表达；(2)回顾已学习的数学概念，体会定义的一般结构. 如初中函数概念，先描述大背景条件（一个变化过程中），指明两个要素（两个变量 x 和 y），然后说明两个要素之间的对应关系（对于变量 x 的每一个值，变量 y 都有唯一的值与它对应），最后给出定义名称（称 y 是 x 的函数）.

设计意图 这个过程是数学抽象的符号阶段，学生经历了分类与识别、分析与建构、归纳与概括的过程，具体结构如下：



(1)体现数学抽象的基本过程.

在对具体情境中的变量及其对应关系分析的基础上,抛开背景情境,聚焦变量与变量之间的关系,归纳概括共性,推广至一般,并用"集合—对应"的语言表达得到函数的定义,实现从理性具体到理性一般的抽象过程.

(2)情境凸显概念的本质特征.

根据函数的本质特征以及学生已有的认知基础,设计四个情境,具体如下:

	情境	对应关系	说明
情境 1	现实情境(行程问题)	解析式	两个情境中函数的对应关系相同,情境 1 中的函数是连续型函数,情境 2 中的函数是离散型函数
情境 2	现实情境(工资问题)	解析式	
情境 3	科学情境(空气质量指数)	图象	函数是连续型函数
情境 4	科学情境(恩格尔系数)	表格	函数是离散型函数

(3)系列问题聚焦函数三要素.

问题是学生思维的"路标",应紧密围绕概念的要素及要素之间的逻辑关系展开.函数的三要素是函数概念的核心,通过系列问题帮助学生逐步厘清函数三要素,并用数学符号语言表达.四组问题整体结构"相似",具体表述略有差异,如问题3.3和问题4.3是仿照前面的方法,描述两个变量之间的对应关系,相对于问题1.4和问题2.3更开放.

(4)下定义的过程注重概念定义结构的一般化.

对函数概念下定义是教学的难点,在实例归纳概括的基础上,一方面对于表达形式,可以从口头语言直观解释再到符号语言抽象表示;另一方面类比已有定义的结构,表达各要素之间的逻辑关系.可以借助初中函数定义,体会定义也是命题,命题包括条件和结论,函数定义也是类似的,先指明条件,也就是函数的三要素,即非空实数集合 A 和 B,以及对应关系 f,再说明三个要素之间的关系,即对于集合 A 中的每一个实数 x,集合 B 中有唯一实数 $y=f(x)$ 与 x 对应.通过这个过程帮助学生进一步体会数学中下定义的方法.

3.3 概念的精致化与系统化

问题6:利用今天学习的内容,解决下列问题:

问题6.1:对于熟悉的一次函数、二次函数、反比例函数,它们的定义域、对应关系和值域分别是什么?请用函数定义描述这些函数.

问题6.2:今天学习的函数定义与初中学习的函数定义之间的联系?

问题6.3:请分析函数 $y=x(10-x)$ 的定义域、对应关系和值域;并尝试构建一个问题情境,

使其中函数的对应关系为 $y=x(10-x)$.[6]

问题 6.4：再次思考引入中的问题.

小结等略.

设计意图　利用新知识再次解释学生熟悉的三类函数，进一步理解函数概念的三要素.通过与初中函数概念的对比分析，让学生体会函数概念的两个抽象层次，初中函数的“变量—对应”说，与运动变化背景紧密相连，比较形象、直观，高中函数的“集合—对应”说，抽象为两个实数集元素之间的对应关系，更聚焦函数的本质特征，拓展了函数的研究视野与应用的范围[7].利用函数解析式构建问题情境，实现从抽象到具体的过程.通过系列问题，帮助学生构建完整的函数概念，促进函数概念的系统化.

4　模型应用中应重点关注的几个方面

(1)重点关注概念的本质属性.

概念的本质属性是概念教学的核心内容.概念教学的目标就是理解概念，理解的认知过程包括解释、举例、分类、总结、推断、比较和说明，比如举例涉及辨认概念的定义特征，并利用这些特征去选择或构建一个具体例子[5].这些过程都需要明确概念的本质属性，明确构成概念的要素以及要素之间的逻辑关系.

概念教学的核心问题指向概念的本质属性.通过问题引导学生经历观察归纳、直观感知，对构成概念的要素进行分类与识别，对要素之间的逻辑关系进行分析与建构.比如三角函数是函数的下位概念，与前面学习的其它函数不同，三角函数反映的是“几何元素之间的对应”，其本质是单位圆上点 P 的坐标与以 OP 为终边的旋转角之间的对应关系.在概念抽象过程中，人教 A 版教材借助具体特殊角，经历“从角的终边位置的确定，到角的终边与单位圆的交点，再到交点坐标与角之间的对应关系”的过程，明确三角函数的三要素，建构几何元素之间的对应关系，这是概念抽象过程中的重点和难点.因此，概念的本质属性是概念抽象过程中的“路标”，支撑起概念教学的内在逻辑，也是基于数学抽象的概念形成模型应用的关键.

(2)重点关注概念形成认知过程的非线性.

对于概念的数学抽象过程，简约阶段是概念抽象的起点，符号阶段是概念抽象的重点，普适阶段是概念抽象的延伸，认知过程包括分类与识别、分析与建构、归纳与概括、定义与表征，以至精细化系统化.对于具体概念，上述认知过程不是绝对的线性关系，比如在函数概念案例中，分类识别与分析建构两个认知过程是交叠在一起的，后续具体函数、函数应用等内容的学习也是概念系统化的过程；对于函数单调性，人教 A 版教材采用了“规一例”法，先用符号语言表达二次函数 $f(x)=x^2$ 的单调性，然后让学生模仿，描述两个熟悉的函数的单调性，再给出一般化严格的数学表达，更具有概念同化的特点，淡化了归纳与概括的过程.在实际教学中，描述性的概念更注重分类与识别的过程，说明性的概念更强调对逻辑关系的分析与建构.因此，概念抽象的认知过程不是严格线性的，每个过程也不是严格“均匀分布”的，在应用模型的过程中需要根据实际情况调整.

(3)重点关注概念形成的整体设计.

由于数学概念的抽象性、概念表征的多元性，以及概念形成过程中思想方法的丰富性，对概念教学要进行整体设计.一方面，概念形成是以系统化为标志.系统化是指新获得的概念纳入已有概念体系中，与相关概念建立起逻辑关系，也就是杜宾斯基的 APOS 模型中的图式阶段.概念系统化主要是通过概念应用来实现的.学生在明确概念的定义、名称、属性之后，就进入概念系统化阶段，通过概念的应用，不断完善优化已有概念系统，这个过程需要持续比较长的时间，涉及更多的概念.如函数的概念，得到定义之后，就进入概念的精致化与系统化的过程，这个过程将在后续的函数性质、三角函数等内容中逐步完成.

另一方面，概念抽象过程中蕴含着丰富的思想方法，如从特殊到一般，从具体到抽象，以及分类、归纳、类比等.这些方法是连接数学概念的暗线，具体概念的数学抽象过程，既是运用这些方法的过程，又是进一步理解这些方法的过程.数学思想方法的理解需要学生经历从直观到抽象、从模糊到严谨、从肤浅到深刻、从模仿到应用、从感性到理性、不断反思、反复提炼的过程.因此，概念教学需要整体设计，使得概念形成过程成为发展学生数学抽象素养的重要载体，实现《课标》提出的“整体把握教学内容，促进数学学科核心素养连续性和阶段性发展.”

（下转第 29 页）

数学运算结果如何近似地解释实际问题.因为我们得到的是实际问题的一个近似值,这个值的可信度有多大?能不能接受?是否需要修改?等等,需要从多个角度来考虑.

在整个数学建模过程中,或许只有极少数学生能够完成全部过程的每个环节和阶段,利用数学的知识和方法解决该实际问题,而大部分学生只能完成其中的一个或两个步骤.尽管如此,即使对于只能完成其中一个步骤的学生,这样的过程也有助于提高他们数学建模的信心,积淀建模的核心素养.例如,通过观察,发现相邻的四个菠萝籽可以构成正方形的四个顶点,进而将问题转化为研究图形的关系.这一过程或许使学生会用数学的眼光看待外部世界,树立良好的数学情感和态度.

4 结束语

总的来说,数学建模的整个过程,让学生体会运用数学解决实际问题的方法,长了"用数学的眼光观察世界、用数学的语言表达世界、用数学思维思考世界"的见识,领悟到"数学与人类生活和社会发展紧密关联"的道理.

尽管中学数学建模目前的状况并不理想,绝大部分学生的建模能力都比较低.然而,引导学生在数学建模学习中"长见识、悟道理"应该是我们追求的一种课堂教学价值取向,将"长见识、悟道理"作为课堂学习目标之一来培育学生核心素养."长见识、悟道理"需要通过学生的主动学习来实现,探索、尝试、实验和实施有利于学生主动学习的教学形态,是当前数学教学值得关注的问题.理解和把握与"长见识""悟道理"相关的教学之道,是数学教学深入改革的方向.

参考文献

[1]牛伟强.高中生数学建模能力发展研究[D].华东师范大学,2019

[2]中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准(2011 年版)[M].北京:北京师范大学出版社,2012

[3]中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017 年版)[M].北京:人民教育出版社,2018

[4]教育部基础教育课程教材专家工作委员会.义务教育数学课程标准(2011 年版)解读[M].北京:北京师范大学出版社,2012:107

[5]李明振,喻平.高中数学建模实施的背景、问题与对策[J].数学通报,2007,47(11):8-14

[6]陈蓓.从 PME 视角看数学建模素养及其培养[J].教育研究与评论(中学教育教学),2017(4):5-10

[7]李贺,张卫明.基于质量检测的初中学生数学建模发展状况的调查研究[J].数学教育学报,2017,26(1):19-21,87

[8]朱娅梅.我国八年级学生数学建模能力的调查研究[J].上海教育科研,2017(4):51-54

[9]徐斌艳.中德学生数学建模能力水平的比较分析——以中国上海和德国巴登符腾堡州学生为例[J].上海教育科研,2008(8):66-69

[10]徐斌艳,沈丹.我国学生的数学建模能力水平分析——以 6~9 年级学生的"缝制足球"实验为例[J].中学数学月刊,2014(7):37-40

[11]纪雪颖.高中学生数学建模能力水平研究——以上海若干高中为例[D].华东师范大学,2010

[12]张淑梅,何雅涵,保继光.高中数学核心素养的统计分析[J].课程·教材·教法,2017,37(10):50-55

[13]孙翔宇.上海市高中生数学建模能力的调查与分析[J].教育测量与评价,2016(6):44-49

[14]徐斌艳,LUDWIG Matthias.中学生数学建模能力水平的实验分析[J].中学数学月刊,2007(11):1-2,30

[15]史宁中.数学思想概论,第 5 辑,自然界中的数学模型[M].长春:东北师范大学出版社,2015:2

[16]中国社会科学院语言研究所词典编辑室编.现代汉语词典(第 6 版)[M].北京:商务印书馆,2012

(上接第 25 页)

参考文献

[1]徐利治,张鸿庆.数学抽象度概念与抽象度分析法[J].数学研究与评论,1985,5(2):133-140

[2]史宁中.数学基本思想 18 讲[M].北京:北京师范大学出版社,2016:14

[3]邵光华,章建跃.数学概念的分类、特征及其教学探讨[J].课程·教材·教法,2009,29(7):47-51

[4]曹才翰,章建跃.数学教育心理学[M].3 版.北京:北京师范大学出版社,2014:112

[5] [美]洛林.W.安德森等.布鲁姆教育目标分类学修订版分类学视野下的学与教及其测评[M].北京:外语教学与研究出版社,2009:69

[6]人民教育出版社 课程教材研究所 中学数学课程教材研究开发中心编著.普通高中教科书数学必修第一册[M].北京:人民教育出版社,2019:60-63

[7]章建跃.如何帮助学生建立完整的函数概念[J].数学通报,2020,59(9):1-8