

高一年级10月联考

数学试题

2022.10

命题人：梁建 审核人：邓迎春

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，计40分。在每小题所给的A、B、C、D四个选项中，只有一项是正确的，请在答题卡上将正确选项按填涂要求涂黑。

1、已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ ， $B = \{x \in \mathbb{N} | x < 3\}$ ，那么集合 $A \cup B$ 等于 (▲)

- A. $[-1, 3)$ B. $\{0, 1, 2\}$ C. $\{-1, 0, 1, 2\}$ D. $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$

2、下列命题中，不是全称量词命题的是 (▲)

- A. 任何一个实数乘以0都等于0 B. 自然数都是正整数
C. 实数都可以写成小数形式 D. 一定存在没有最大值的二次函数

3、“ $a = 0$ ”是“关于 x 的不等式 $ax - b \geq 1$ 的解集为 \mathbb{R} ”的 (▲)

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

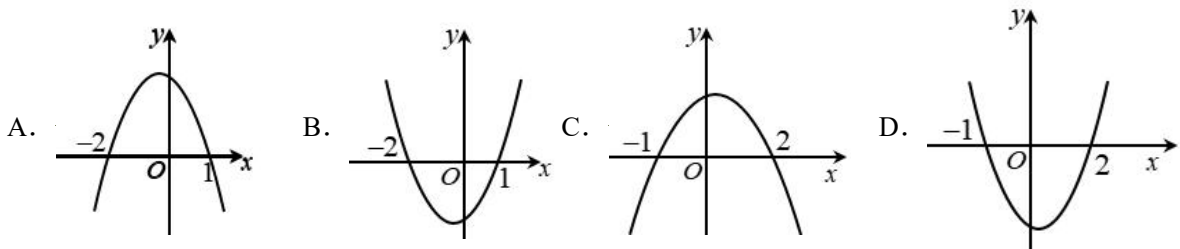
4、若 $a > 0$ ， $b > 0$ ，且 $a \neq b$ ，则 (▲)

- A. $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ B. $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$
C. $\sqrt{ab} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < \frac{a+b}{2}$ D. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$

5、已知集合 $A = \{x | x > 1\}$ ， $B = \{x | ax > 1\}$ ，若 $B \subseteq A$ ，则实数 a 的取值范围为 (▲)

- A. $(0, 1)$ B. $(0, 1]$ C. $[0, 1]$ D. $[0, 1)$

6、不等式 $ax^2 - x + c > 0$ 的解集为 $\{x | -2 < x < 1\}$ ，则函数 $y = ax^2 + x + c$ 的图像大致为 (▲)



7、已知 $x > 0$ ， $y > 0$ ，且 $x \neq y$ ，设 $a = x^4 + y^4$ ， $b = x^3y + xy^3$ ， $c = 2x^2y^2$ ，则 a 、 b 、 c 的大小关系为 (▲)

- A. $a > b > c$ B. $c > b > a$ C. $a > c > b$ D. $b > a > c$

8、由于近年来，冬季气候干燥，冷空气频繁袭来为提高公民的取暖水平，某社区决定建立一个取暖供热站.已知供热站每月自然消费与供热站到社区的距离成反比，每月供热费与供热站到社区的距离成正比，如果在距离社区20千米处建立供热站，这两项费用分别为 0.5 万元和8万元，那么要使这两项费用之和最小，供热站应建在离社区（ ▲ ）

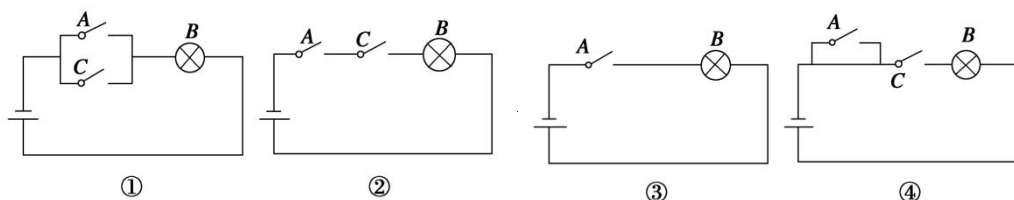
- A. 5千米 B. 6千米 C. 7千米 D. 8千米

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分. 在每小题所给的 A. B. C. D. 四个选项中，有多项是正确的，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分. 请在答题卡上将正确选项按填涂要求涂黑.

9、已知全集为 U ， A ， B 是 U 的非空子集且 $A \subseteq C_U B$ ，则下列关系一定正确的是（ ▲ ）

- A. $\exists x \in U, x \notin A$ 且 $x \in B$ B. $\forall x \in A, x \notin B$
 C. $\forall x \in U, x \in A$ 或 $x \in B$ D. $\exists x \in U, x \in A$ 且 $x \in B$

10、在下列所示电路图中，下列选项正确的是（ ▲ ）



- A. 如图①所示，开关 A 闭合是灯泡 B 亮的充分不必要条件；
 B. 如图②所示，开关 A 闭合是灯泡 B 亮的必要不充分条件；
 C. 如图③所示，开关 A 闭合是灯泡 B 亮的充要条件；
 D. 如图④所示，开关 A 闭合是灯泡 B 亮的必要不充分条件.

11、下列命题不正确的（ ▲ ）

- A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 0 \Rightarrow |a| > |b|$ B. $\frac{a}{c} > \frac{b}{c} \Rightarrow a > b$
 C. $\left. \begin{matrix} a^3 > b^3 \\ ab > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ D. $\left. \begin{matrix} a^2 > b^2 \\ ab > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

12、设正实数 a 、 b 满足 $a+b=1$ ，则下列说法正确的是（ ▲ ）

- A. \sqrt{ab} 有最大值 $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{a+2b} + \frac{1}{2a+b}$ 有最小值 4
 C. $a^2 + b^2$ 有最小值 $\frac{1}{2}$ D. $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 有最大值 $\sqrt{2}$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，计 20 分. 其中第 16 题第一空 2 分，第二空 3 分. 只要求写出最后结果，并将正确结果填写到答题卡相应位置.

13、设 $a, b \in \mathbb{R}$ ，集合 $\{1, a+b, a\} = \left\{0, \frac{b}{a}, b\right\}$ ，则 $b-a =$ ▲

14、命题“ $\forall x \in [0, +\infty)$, $x^2 - x + 1 > 0$ ”的否定是_____▲

15、不等式 $\frac{6}{x+1} \geq 1$ 的解集为_____▲

16、若关于 x 的方程 $x^2 - ax + 1 = 0$ 在区间 $(\frac{1}{2}, 3)$ 内有两个不同的实数根, 则实数 a 的取值范围为_____

▲; 若该方程在区间 $(\frac{1}{2}, 3)$ 内有实数根, 则实数 a 的取值范围为_____▲.

四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 请在答题卡指定区域内作答. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17、(本题满分10分) 已知集合 $A = \{x | 3 \leq x < 7\}$, $B = \{x | 2 < x < 10\}$, $C = \{x | 5 - a < x < a\}$.

(1) (4分) 求 $A \cup B$;

(2) (6分) 若 $C \subseteq (A \cup B)$, 求实数 a 的取值范围.

18、(本题满分12分) 命题 $p: \forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x - 3m > 0$; 命题 $q: \exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 4mx + 1 < 0$

(1) (3分) 若命题 p 为真命题, 求实数 m 的取值范围;

(2) (3分) 若命题 q 为假命题, 求实数 m 的取值范围;

(3) (6分) 若命题 p, q 至多有一个为真命题, 求实数 m 的取值范围.

19、(本题满分12分) 在① $\{1, a\} \subseteq \{a^2 - 2a + 2, a - 1, 0\}$; ② 关于 x 的不等式 $1 < ax + b \leq 3$ 的解集是

$\{x | 3 < x \leq 4\}$ 这两个条件中任选一个, 补充在下面的问题 (1) 中并解答, 若同时选择两个条件作答, 以第一个作答计分.

(1) (6分) 已知_____, 求关于 x 的不等式 $ax^2 - 3x - a > 0$ 的解集 A ;

(2) (6分) 在 (1) 的条件下, 若非空集合 $B = \{x | 2k < x \leq k + 2\}$, $A \cup B = A$, 求实数 k 的取值范围.

20、（本题满分12分）设 $y = ax^2 + (1-a)x + a - 2$.

(1)（6分）若不等式 $y \geq -2$ 对一切实数 x 恒成立，求实数 a 的取值范围；

(2)（6分）解关于 x 的不等式 $ax^2 + (1-a)x + a - 2 < a - 1 (a \in \mathbb{R})$.

21、（本题满分12分）

(1)（6分）有一个体积为2的长方体，它的长，宽，高依次为 $a, b, 1$. 现将它的长增加1，宽增加2，且保持体积不变，求所得新长方体高的最大值.

(2)（6分）平面直角坐标系中，已知点 $A(-1,0)$ ，点 $B(-2,1)$ ，在 x 轴正半轴上有一动点 P ，求点 P 的坐标，使得 $\frac{PB^2}{PA}$ 最小，并求最小值.

22、问题：正数 a, b 满足 $a + b = 1$ ，求 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b}$ 的最小值. 其中一种解法是：

$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b}\right)(a + b) = 1 + \frac{b}{a} + \frac{2a}{b} + 2 \geq 3 + 2\sqrt{2}$ ，当且仅当 $\frac{b}{a} = \frac{2a}{b}$ 且 $a + b = 1$ 时，即 $a = \sqrt{2} - 1$ 且

$b = 2 - \sqrt{2}$ 时取等号. 学习上述解法并解决下列问题：

(1)（6分）若实数 a, b, x, y 满足 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，试比较 $a^2 - b^2$ 和 $(x - y)^2$ 的大小，并指明等号成立的条件；

(2)（6分）利用（1）的结论，求代数式 $M = \sqrt{3m - 5} - \sqrt{m - 2}$ 的最小值，并求出使得 M 最小的 m 的值.