第二章 不等式的证明方法

由于不等式的种类繁多、覆盖面广、处理时技巧性较强，因而是高中数学的一个难点.导数为我们处理不等式问题提供了一个新的途径，利用导数处理不等式问题具有方法简捷、可操作性强的特点，但处理方式又较为灵活，需要掌握不同的证明方法以及扎实的数学功底与融汇交叉、创新性的思维方式.本章，我们通过对一些试题的研究，提供一些利用导数证明不等式的方法.

§2.1 兵分两路

对于一些较为复杂的函数，如果通过直接构造一个函数很难或根本就无法解决时，可尝试通过等价转化，适当变形，转化为两个函数来处理，问题可能会得到极大的简化，从而达到顺利证明的目的.我们称这种证明方法为兵分两路.本节，我们从三种角度来说明这种方法的使用.

一、一分为二

1.和差拆分

【例 1】已知函数 $f(x)=\ln x-a(1-\dfrac{1}{x})$（$a\in\mathbf{R}$）.

（I）若当 $x>1$ 时，$f(x)>0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

（II）设 $F(x)=\dfrac{3-3x-xf(x)}{\mathrm{e}^x}$（$\mathrm{e}=2.71828\cdots$），求证：当 $a=-1$ 时，$F(x)<\dfrac{2\mathrm{e}^3+1}{\mathrm{e}^3}$.

（2019 年山东省济宁市高二期期末质量检测试题）

【解析】（I）由 $f(x)=\ln x-a(1-\dfrac{1}{x})$（$a\in\mathbf{R}$），得 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{a}{x^2}=\dfrac{x-a}{x^2}$（$x>0$）.

①当 $a\le 1$ 时，由 $x>1$ 知，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，所以 $x>1$ 时，$f(x)>f(1)=0$ 恒成立.所以 $a\le 1$ 满足题意；

②当 $a>1$ 时，由 $1<x<a$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(1,a)$ 上为减函数，此时 $f(x)<f(1)=0$，不符合题意，所以 $a>1$ 不满足题意.

综上所述，当 $x>1$ 时，$f(x)>0$ 恒成立时，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,1]$.

（II）当 $a=1$ 时，$F(x)<\dfrac{2\mathrm{e}^3+1}{\mathrm{e}^3}\Leftrightarrow 2-2x-x\ln x<\dfrac{2\mathrm{e}^3+1}{\mathrm{e}^3}\cdot\mathrm{e}^x$.

令 $p(x)=2-2x-x\ln x$（$x>0$），$p'(x)=-3-\ln x$.

从而 $x\in(0,\mathrm{e}^{-3})$ 时，$p'(x)>0$，$p(x)$ 单调递增；

$x\in(\mathrm{e}^{-3},+\infty)$ 时，$p'(x)<0$，$p(x)$ 单调递减.

从而$p(x)\le p(\mathrm{e}^{-3})=2+\dfrac{1}{\mathrm{e}^3}=\dfrac{2\mathrm{e}^3+1}{\mathrm{e}^3}$.

而$q(x)=\dfrac{2\mathrm{e}^3+1}{\mathrm{e}^3}\cdot\mathrm{e}^x$（$x>0$）为增函数，所以$q(x)>q(0)=\dfrac{2\mathrm{e}^3+1}{\mathrm{e}^3}$.

所以$p(x)\le\dfrac{2\mathrm{e}^3+1}{\mathrm{e}^3}=q(0)<q(x)$，从而原不等式得证.

导数是用来研究连续函数性态的强有力的工具.除在高中阶段所认识的一系列基本初等函数外，高考导数的压轴试题常出现或需要构造下列六种典型的函数模型来辅助解题：

（1）$f(x)\ln f(x)$；（2）$\dfrac{f(x)}{\ln f(x)}$；（3）$\dfrac{\ln f(x)}{f(x)}$；（4）$f(x)\mathrm{e}^{f(x)}$；（5）$\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^{f(x)}}$；（6）$\dfrac{\mathrm{e}^{f(x)}}{f(x)}$

命题人经常立足于上述六个函数命题一定的题目.若在同一试题中出现了两种或两种以上的典型函数，则此时往往人工不可能求其极（最）值.此时，就需要处用函数“分拆”的手段，将原不等式分拆成一些可求局部最值的两个函数或更多个函数，通过分拆与二次整合的相互配合，可将原不等式的证明问题转化为求局部函数的最值问题，然后分别求两个函数的最值即可达到解决问题的目的.

【例 2】已知函数$f(x)=x\ln x-ax$.

（I）当$a=-1$时，求函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上的最值；

（II）求证：对一切$x\in(0,+\infty)$，都有$1+\ln x>\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x+1}}-\dfrac{2}{\mathrm{e}^2x}$成立.

【解析】（I）函数$f(x)=x\ln x-ax$的定义域为$(0,+\infty)$.

当$a=-1$时，$f(x)=x\ln x+x$，$f'(x)=\ln x+2$.由$f'(x)=0$，得$x=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$.

当$x\in(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}^2})$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当$x\in(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2},+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

因此，$f(x)$在$x=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$时取得最小值，即$f(x)_{\min}=f(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2})=-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$，但无最大值.

（II）当$x>0$时，$\ln x+1>\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x+1}}-\dfrac{2}{\mathrm{e}^2x}$等价于$x(\ln x+1)>\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x+1}}-\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}$.

由（I）知$a=-1$时，$f(x)=x\ln x+x$的最小值为$-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$，当且仅当$x=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$时取等号.

设$G(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x+1}}-\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}$（$x>0$），$G'(x)=\dfrac{1-x}{\mathrm{e}^{x+1}}$.由$G'(x)=0$，得$x=1$.

当$x\in(0,1)$，$G'(x)>0$，$G(x)$单调递增；

当$x\in(1,+\infty)$，$G'(x)<0$，$G(x)$单调递减.

因此，$G(x)$ 在 $x=1$ 处取得最大值，即 $G(x)_{\max}=G(1)=-\dfrac{1}{e^2}$，当且仅当 $x=1$ 时取等号.

从而可知，对一切 $x\in(0,+\infty)$，都有 $f(x)>G(x)$，即 $\ln x+1>\dfrac{1}{e^{x+1}}-\dfrac{2}{e^2x}$.

在证明不等式中，等价转化是关键，此处利用 $f(x)_{\min}>G(x)_{\max}$ 恒成立，从而 $f(x)>G(x)$，但此处 $f(x)$ 与 $G(x)$ 取到最值的条件不是同一个“x”的值.

【例 3】设函数 $f(x)=ae^x\ln x+\dfrac{be^{x-1}}{x}$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=e(x-1)+2$.

（I）求 a,b；

（II）求证：$f(x)>1$.

（2014 年全国 I 卷理科试题）

【解析】（I）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=ae^x\ln x+\dfrac{a}{x}e^x-\dfrac{b}{x^2}e^{x-1}+\dfrac{b}{x}e^{x-1}$

由题意可得 $f(1)=2$，$f'(1)=e$.故 $a=1$，$b=2$.

（II）方法一

由（I）知，$f(x)=e^x\ln x+\dfrac{2}{x}e^{x-1}$，因为 $e^x>0$ 且 $x>0$，从而

$f(x)>1\Leftrightarrow x\ln x>xe^{-x}-\dfrac{2}{e}$.

设 $g(x)=x\ln x$，$h(x)=xe^{-x}-\dfrac{2}{e}$（$x>0$）.

从而 $g'(x)=1+\ln x$，令 $g'(x)=0$，得 $x=\dfrac{1}{e}$.

当 $x\in(0,\dfrac{1}{e})$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x\in(\dfrac{1}{e},+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增.

从而 $g(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{e}$ 处取得最小值 $g(x)_{\min}=g(-\dfrac{1}{e})=-\dfrac{1}{e}$.

而 $h'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)$.令 $h'(x)=0$，得 $x=1$.

当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递减.

从而$h(x)$在$x=1$处最得最大值$h(x)_{\max}=h(1)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

由于两个等号不可能同时取到，所以$g(x)>h(x)$，即$f(x)>1$.

2.乘积拆分

【例 4】已知函数$f(x)=\dfrac{2\ln x+2}{\mathrm{e}^x}$.

（I）求函数$f(x)$的单调区间；

（II）证明：当$x>0$时，都有$f'(x)\ln(x+1)<\dfrac{2}{\mathrm{e}^x}+\dfrac{2}{\mathrm{e}^{x+2}}$.

（2018 年安徽省安庆市重点中学联考试题）

【解析】（I）$f'(x)=\dfrac{2(1-x-x\ln x)}{x\mathrm{e}^x}$.令$g(x)=1-x-x\ln x$，则$g(1)=0$.

当$0<x<1$时，$1-x>0$，$-x\ln x>0$，所以$g(x)>0$，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

当$x>1$时，$1-x<0$，$-x\ln x<0$，所以$g(x)<0$，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减.

所以函数$f(x)$的增区间为$(0,1)$，减区间为$(1,+\infty)$.

（II）要证明$f'(x)\ln(x+1)<\dfrac{2}{\mathrm{e}^x}+\dfrac{2}{\mathrm{e}^{x+2}}$，即证$(1-x-x\ln x)\ln(x+1)<(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^2})x$，令$g(x)=1-x-x\ln x$（$x>0$），则$g'(x)=-1-(\ln x+1)=-2-\ln x$.

当$0<x<\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增；

当$x>\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减.

所以$g(x)\le g(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2})=1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$，所以$1-x-x\ln x\le 1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$.

从而可知，要证$(1-x-x\ln x)\ln(x+1)<(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^2})x$，只需证$\ln(x+1)<x$即可.

令$h(x)=\ln(x+1)-x$（$x>0$），从而$h'(x)=\dfrac{1}{x+1}-1<0$，从而$h(x)$单调递减，所以$h(x)<h(0)=0$，于是$0<\ln(x+1)<x$.

综上所述，当$x>0$时，都有$f'(x)\ln(x+1)<\dfrac{2}{\mathrm{e}^x}+\dfrac{2}{\mathrm{e}^{x+2}}$.

对于同时含有$\ln x$与e^x的超越函数，解决时往往需要根据两类函数的特点，挖掘结构特征，进行灵活变形.

【例 5】已知函数$f(x)=\dfrac{\ln x+1}{\mathrm{e}^x}$（$k$为常数，e为自然对数的底数）.

（I）求 $f(x)$ 的单调区间；

（II）设 $g(x)=(x^2+x)f'(x)$，其中 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，求证：对任意 $x>0$，总有 $g(x)<\dfrac{e^2+1}{e^2}$.

【解析】（I）$f'(x)=\dfrac{1-x-x\ln x}{xe^x}$.

当 $x>1$ 时，由 $1-x<0$，$-x\ln x<0$，知 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $0<x<1$ 时，由 $1-x>0$，$-x\ln x>0$，知 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递减.

从而，可知 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$，递减区间为 $(1,+\infty)$.

（II）由题意知，$g(x)=(x^2+x)\dfrac{1-x\ln x-x}{xe^x}=\dfrac{x+1}{e^x}(1-x\ln x-x)$.

令 $h(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$（$x>0$），则 $h'(x)=-\dfrac{x}{e^x}<0$，则 $h(x)$ 单调递减，从而 $h(x)<h(0)=1$，所以 $0<\dfrac{x+1}{e^x}<1$.

再令 $p(x)=1-x\ln x-x$（$x>0$），则 $p'(x)=-\ln x-2$，令 $p'(x)=0$，从而得 $x=e^{-2}$.

当 $0<x<e^{-2}$ 时，$p'(x)>0$，$p(x)$ 单调递增；

当 $x>e^{-2}$ 时，$p'(x)<0$，$p(x)$ 单调递减.

从而 $p(x)\le p(e^{-2})=\dfrac{e^2+1}{e^2}$.

从而 $\dfrac{x+1}{e^x}(1-x\ln x-x)<\dfrac{e^2+1}{e^2}$，即 $g(x)<\dfrac{e^2+1}{e^2}$.

【例 6】已知函数 $f(x)=e^x-a\ln x-a$，其中常数 $a>0$.

（I）当 $a=e$ 时，求函数 $f(x)$ 的极值；

（II）若函数 $y=f(x)$ 有两个零点 x_1,x_2（$0<x_1<x_2$），求证：$\dfrac{1}{a}<x_1<1<x_2<a$；

（III）求证：$e^{2x-2}-e^{x-1}\ln x-x\ge 0$.

【解析】（I）当$a=\mathrm{e}$时，$f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}\ln x-\mathrm{e}$，则$f'(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{\mathrm{e}}{x}$，易知$f'(x)$单调递增，且$f'(1)=0$. 则

当$0<x<1$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当$x>1$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

所以$f(x)$有极小值$f(1)=0$，没有极大值.

（II）先证明$f(x)\ge 0$恒成立时，有$0<a\le \mathrm{e}$成立.

若$0<x\le\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，则$f(x)=\mathrm{e}^x-a(\ln x+1)\ge 0$恒成立.

若$x>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，由$f(x)\ge 0$，得$a\le\dfrac{\mathrm{e}^x}{\ln x+1}$.

令$\varphi(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\ln x+1}$，则$\varphi'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x\cdot(\ln x+1-\frac{1}{x})}{(\ln x+1)^2}$.

$g(x)=\ln x+1-\dfrac{1}{x}$，$g'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}>0$，$g(x)$单调递增，且$g(1)=0$.

当$\dfrac{1}{\mathrm{e}}<x<1$时，$g(x)<0$，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$单调递减；

当$x>1$时，$g(x)>0$，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$单调递增.

所以$\varphi(x)_{\min}=\varphi(1)=\mathrm{e}$.

所以$f(1)=\mathrm{e}-a<0$，$f(a)=\mathrm{e}^a-a\ln a-a$，$f'(a)=\mathrm{e}^a-\ln a-2$，从而$f''(a)=\mathrm{e}^a-\dfrac{1}{a}>\mathrm{e}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}>0$，所以$f'(a)=\mathrm{e}^a-\ln a-2$在$(\mathrm{e},+\infty)$上单调递增，

因为$f'(a)=\mathrm{e}^a-\ln a-2>\mathrm{e}^a-3>0$，所以$f(a)=\mathrm{e}^a-a\ln a-a$在$(\mathrm{e},+\infty)$上单调递增，从而$f(a)>f(\mathrm{e})=\mathrm{e}^a-2\mathrm{e}>0$. 则$f(a)f(1)<0$，所以$1<x_2<a$.

由$a>\mathrm{e}$，得$f(\dfrac{1}{a})=\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}-a\ln\dfrac{1}{a}-a=\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}+a\ln a-a>\mathrm{e}$，则$f(\dfrac{1}{a})f(1)<0$，所以$\dfrac{1}{a}<x_1<1$.

综上所述，$\dfrac{1}{a}<x_1<1<x_2<a$.

（III）由（I）知，当$a=\mathrm{e}$时，$f(x)\ge 0$恒成立，即$\mathrm{e}^x-\mathrm{e}\ln x\ge \mathrm{e}$.

设$h(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$（$x>0$），则$h'(x)=\dfrac{1-x}{\mathrm{e}^x}$.

当$0<x<1$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增；当$x>1$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减.

$h(x)_{\max}=h(1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，即$\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\le\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，从而$\mathrm{e}^{x-2}\le \mathrm{e}$.

所以$\mathrm{e}^x-\mathrm{e}\ln x\ge \mathrm{e}\ge\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x-2}}$，即$\mathrm{e}^{2x-2}-\mathrm{e}^{x-1}\ln x-x\ge 0$.

二、隔离直线

在处理不等式的证明问题时，我们以常会遇到两个函数的图象被某条直线隔离的情形.如果我们能够找到这条直线，然后再构造两个差函数，问题往往能迎刃而解.

【例 7】若存在实常数k和b，使得函数$f(x)$和$g(x)$对其定义域上的任意实数x分别满足：$f(x)\ge kx+b$和$g(x)\le kx+b$，则称直线$l:y=kx+b$为$f(x)$和$g(x)$的“隔离直线”.已知$h(x)=x^2$，$\varphi(x)=2\mathrm{e}\ln x$（其中e为自然对数的底数）.

(I)求$F(x)=h(x)-\varphi(x)$的极值；

(II) 函数$h(x)$和$\varphi(x)$是否存在隔离直线？若存在，求出此隔离直线方程；若不存在，请说明理由.

【解析】(I) $\because F(x)=h(x)-\varphi(x)=x^2-2\mathrm{e}\ln x\ (x>0)$，

$\therefore F'(x)=2x-\dfrac{2\mathrm{e}}{x}=\dfrac{2(x-\sqrt{\mathrm{e}})(x+\sqrt{\mathrm{e}})}{x}$. 当$x=\sqrt{\mathrm{e}}$时，$F'(x)=0$.

$\because$当$0<x<\sqrt{\mathrm{e}}$时，$F'(x)<0$，此时函数$F(x)$递减；

当$x>\sqrt{\mathrm{e}}$时，$F'(x)>0$，此时函数$F(x)$递增；

$\therefore$当$x=\sqrt{\mathrm{e}}$时，$F(x)$取极小值，其极小值为0.

(II)(解法一)由（I）可知函数$h(x)$和$\varphi(x)$的图象在$x=\sqrt{\mathrm{e}}$处有公共点，

因此若存在$h(x)$和$\varphi(x)$的隔离直线，则该直线过这个公共点.

设隔离直线的斜率为k，则直线方程为$y-\mathrm{e}=k(x-\sqrt{\mathrm{e}})$，即$y=kx+\mathrm{e}-k\sqrt{\mathrm{e}}$.

由$h(x)\ge kx+\mathrm{e}-k\sqrt{\mathrm{e}}(x\in R)$，可得$x^2-kx-\mathrm{e}+k\sqrt{\mathrm{e}}\ge 0$当$x\in\mathbf{R}$时恒成立

$\because\Delta=(k-2\sqrt{\mathrm{e}})^2$，$\therefore$由$\Delta\le 0$，得$k=2\sqrt{\mathrm{e}}$.

下面证明$\varphi(x) \le 2\sqrt{e}x - e$当$x>0$时恒成立.

令$G(x)=\varphi(x)-2\sqrt{e}x+e=2e\ln x-2\sqrt{e}x+e$，

则$G'(x)=\dfrac{2e}{x}-2\sqrt{e}=\dfrac{2\sqrt{e}(\sqrt{e}-x)}{x}$， 当$x=\sqrt{e}$时，$G'(x)=0$.

$\because$当$0<x<\sqrt{e}$时，$G'(x)>0$，此时函数$G(x)$递增；

当$x>\sqrt{e}$时，$G'(x)<0$，此时函数$G(x)$递减；

$\therefore$当$x=\sqrt{e}$时，$G(x)$取极大值，其极大值为0.

从而$G(x)=2e\ln x-2\sqrt{e}x+e\le 0$，即$\phi(x)\le 2\sqrt{e}x-e(x>0)$恒成立.

$\therefore$函数$h(x)$和$\varphi(x)$存在唯一的隔离直线$y=2\sqrt{e}x-e$.

(解法二)由(I)可知当$x>0$时，$h(x)\ge\varphi(x)$ (当且当$x=\sqrt{e}$时取等号) .

若存在$h(x)$和$\varphi(x)$的隔离直线，则存在实常数k和b，使得$h(x)\ge kx+b$ $(x\in R)$和$\varphi(x)\le kx+b$ $(x>0)$恒成立，令$x=\sqrt{e}$，则$e\ge k\sqrt{e}+b$ 且$e\le k\sqrt{e}+b$

$\therefore k\sqrt{e}+b=e$，即$b=e-k\sqrt{e}$. 后面解题步骤同解法一.

寻求隔离直线的关键是，首先找出两个函数的公共点，可以采用构造函数，利用函数的单调性寻求函数的零点，得出公共点；其次将过公共点的直线设成点斜式，代入已知条件，能同时使两个不等式恒成立的直线，即为所求隔离直线.

【例 8】已知函数$f(x)=e^x-\ln(x+m)$.当$m\le 2$时，求证：$f(x)>0$.

分析：本例的常规思路是转化为证明函数$f(x)$的最小值大于0，但在求导函数$f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+m}$的零点时遇到了困难.转而观察函数$y=e^x$与$y=\ln(x+m)$的图象之间的关系（当$m=2$时如图1所示，当$m<2$时如图2所示），从中获取解题思路.

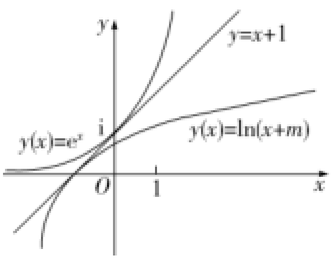

图 1

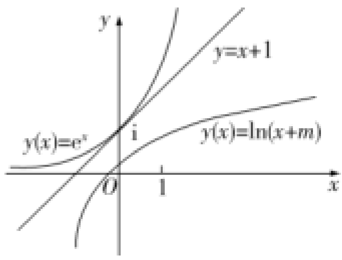

图 2

【证明】因为 $y=\mathrm{e}^x$ 在 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=x+1$，$y=\ln(x+2)$ 在 $(-1,0)$ 处的切线方程为 $y=x+1$，即 $y=x+1$ 是函数 $y=\mathrm{e}^x$ 与函数 $y=\ln(x+2)$ 的公切线.

设 $g(x)=\mathrm{e}^x-x-1$，则 $g'(x)=\mathrm{e}^x-1$.

当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；

当 $x<0$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减.

因为 $g(0)=0$，所以 $\mathrm{e}^x\geq x+1$，当且仅当 $x=0$ 时取等号.

所以，除切点 $(0,1)$ 之外，曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 在直线 $y=x+1$ 的上方.

同理可证：除切点 $(-1,0)$ 之外，曲线 $y=\ln(x+2)$ 在直线 $y=x+1$ 的下方.

故 $\mathrm{e}^x>\ln(x+2)$.

而当 $m\leq 2$，$x\in(-m,+\infty)$ 时，$\ln(x+m)\leq\ln(x+2)$ 恒成立，

故当 $m\leq 2$ 时，$\mathrm{e}^x>\ln(x+m)$，即 $f(x)>0$.

本例实际上是不断放缩，利用不等式 $\mathrm{e}^x\geq x+1\geq\ln(x+2)\geq\ln(x+m)$ 证明 $f(x)>0$. 要熟悉不等式 $\mathrm{e}^x\geq x+1$ 及其变形 $\mathrm{e}^{x-1}\geq x$、$\mathrm{e}^x\geq \mathrm{e}x$、$\ln x\leq x-1$、$\ln x\geq 1-\dfrac{1}{x}$、$\ln(x+1)\leq x$、$\ln(x+1)\geq\dfrac{x}{x+1}$、$\ln x\leq\dfrac{x}{\mathrm{e}}$、$\ln x\geq-\dfrac{1}{\mathrm{e}x}$ 的适用范围及等号成立的条件，这些不等式都是指、对数函数放缩时常用的不等式.

【例 9】已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-x^2$.

（I）求曲线 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；

（II）求证：当 $x>0$ 时，$\dfrac{\mathrm{e}^x+(2-\mathrm{e})x-1}{x}\geq\ln x+1$.

（2018 年安徽省太和中学三模试题）

【解析】(I)对 $f(x)$ 求导，得 $f'(x)=\mathrm{e}^x-2x$.由题意设，得 $f'(1)=\mathrm{e}-2$，$f(1)=\mathrm{e}-1$，所以曲线 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=(\mathrm{e}-2)(x-1)+\mathrm{e}-1$，即 $(\mathrm{e}-2)x-y+1=0$.

（II）令 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=\mathrm{e}^x-2$.

当 $x<\ln 2$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

当 $x>\ln 2$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增.

$g(x)_{\min}=g(\ln 2)=f'(\ln 2)=2-2\ln 2>0$，所以 $f(x)=\mathrm{e}^x-x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

由于曲线 $f(x)$ 在 $x=1$ 的切线方程为 $y=(\mathrm{e}-2)x+1$，$f(1)=\mathrm{e}-1$，可猜测函数 $f(x)$ 的图象恒在切线 $y=(\mathrm{e}-2)x+1$ 的上方.

先证明当 $x>0$ 时，$f(x)\geq(\mathrm{e}-2)x+1$.

设 $h(x)=f(x)-(\mathrm{e}-2)x-1$（$x>0$），则 $h'(x)=\mathrm{e}^x-2x-(\mathrm{e}-2)$，$h''(x)=\mathrm{e}^x-2$.

当 $x<\ln 2$ 时，$h''(x)<0$，$h'(x)$ 单调递减；

当 $x>\ln 2$ 时，$h''(x)>0$，$h'(x)$ 单调递增.

由 $h'(0)=3-\mathrm{e}>0$，$h'(1)=0$ 且 $0<\ln 2<1$，从而 $h'(\ln 2)<0$，所以存在 $x_0\in(0,\ln 2)$，使得 $h'(x_0)=0$.从而

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增；

当 $x\in(x_0,1)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增.

因为 $h(0)=h(1)=0$，所以 $h(x)\geq 0$，即 $f(x)\geq(\mathrm{e}-2)x+1$，当且仅当 $x=1$ 时取等号，所以当 $x>0$ 时，$e^x-x^2\geq(e-2)x+1$，变形可得 $\dfrac{\mathrm{e}^x+(2-\mathrm{e})x-1}{x}\geq x$，又由于 $x\geq\ln x+1$，当且仅当 $x=1$ 时取等号（证明略），所以 $\dfrac{e^x+(2--e)x-1}{x}\geq\ln x+1$，当且仅当 $x=1$ 时取等号.

切线法值得认真探究，若第（I）题是求曲线的切线方程，就需要注意是否运用切线放缩法进行放缩解决问题.

【例 10】对于函数图象上的不同两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，如果在函数图象上存在点 $M(x_0,y_0)$（其中 $x_0\in(x_1,x_2)$）使得点 M 处的切线 $l//AB$，则称直线 AB 存在“相依切线”.特别地，当 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ 时，又称直线 AB 存在“中值相依切线”.已知函数

$f(x)=\ln x-\frac{1}{2}ax^2+bx$（$a>0$），且导数 $f'(1)=0.$

（I）试用含有 a 的式子表示 b，并求 $f(x)$ 的单调区间；

（II）试问：在函数 $f(x)$ 上是否存在两点 A、B，使得直线 AB 存在"中值相依切线"？若存在，请求出 A、B 的坐标；若不存在，请说明理由.

【解析】（I）$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，由 $f'(x)=\frac{1}{x}-ax+b$，$f'(1)=1-a+b=0$，得 $b=a-1$. 代入，得 $f'(x)=\frac{1}{x}-ax+a-1=-\frac{(ax+1)(x-1)}{x}$.

当 $f'(x)>0$ 时，$-\frac{(ax+1)(x-1)}{x}>0$，由 $x>0$，得 $(ax+1)(x-1)<0$.

又 $a>0$，得 $0<x<1$，即 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增.

当 $f'(x)<0$ 时，$-\frac{(ax+1)(x-1)}{x}<0$，由 $x>0$，得 $(ax+1)(x-1)>0$.

又 $a>0$，得 $x>1$，即 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

（II）在函数 $f(x)$ 上不存在两点 A、B，使得直线 AB 存在"中值相依切线".

假设存在两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，不妨设 $0<x_1<x_2$，则

$y_1=\ln x_1-\frac{1}{2}x_1^2+(a-1)x_1$，$y_2=\ln x_2-\frac{1}{2}ax_2^2+(a-1)x_2$.

$$\text{所以 } k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}-\frac{\frac{1}{2}a(x_2^2-x_1^2)-(a-1)(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$$

$$=\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}-\frac{1}{2}a(x_1+x_2)+a-1.$$

函数图象在 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$ 处的切线斜率为

$$k=f'(x_0)=f'(\frac{x_1+x_2}{2})=\frac{2}{x_1+x_2}-a\cdot\frac{x_1+x_2}{2}+(a-1).$$

得 $\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}-\frac{1}{2}a(x_1+x_2)+a-1=\frac{2}{x_1+x_2}-a\cdot\frac{2}{x_1+x_2}+(a-1)$，化简，得

$$\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}=\frac{2}{x_1+x_2}，\ \ln\frac{x_2}{x_1}=\frac{2(x_2-x_1)}{x_2+x_1}=\frac{2(\frac{x_2}{x_1}-1)}{\frac{x_2}{x_1}+1}.$$

令 $\frac{x_2}{x_1}=t$，则 $t>1$，上式可以转化为 $\ln t=\frac{2(t-1)}{t+1}=2-\frac{4}{t+1}$，即 $\ln t+\frac{4}{t+1}=2.$

若令 $g(t)=\ln t+\frac{4}{t+2}$，则 $g'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}.$

由 $t>1$，$g'(t)>0$，所以 $g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 内单调递增，$g(t)>g(1)=2.$ 这表明在 $(1,+\infty)$ 内不存在 t，使得 $\ln t+\frac{4}{t+1}=2.$

综上所述，在函数 $f(x)$ 上不存在两点 A、B 使得直线 AB 存在“中值相依切线”.

当问题化归到 $\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2+x_1}=\frac{2}{x_1+x_2}$ 时，很难进一步求解，此时可利用整体思想，即设 $\frac{x_2}{x_1}=t$（$t>1$），就可将问题简化为方程 $\ln t+\frac{4}{t+1}=2$ 是否有解. 此类设法是解决含参数较多的问题的一个技巧，在解题时，若能灵活应用，往往可以收到化陌生为熟悉、化繁琐为简单的效果. 对于“相依切线”的问题，可求出直线 AB 的斜率，利用导数求出 A、B 两点间曲线的切线的斜率，令两斜率相等，建立相等关系，将问题归结为方程是否存在根的问题. 此时可构造函数，使问题转化为判断函数是否有零点问题，可利用函数的单调性求解，而函数单调性的判断，最好的工具是导数.