**问题转化能力**

-----高中数学学习中不可或缺的能力

**技巧解读**

任何一道数学题目，都包含有其特定的条件和关系，稍具难度的题目其条件和关系与基础知识的联系一般是不明显的，甚至是隐蔽的，因此，解题方法的优良、速度快慢，取决于能否对题目进行深入的、细致的观察和认真思考，发现其本质，做出相应的联想（联想是实现问题合理转化的关键），找出题目的切入点，实现问题的连续转化,从而达到解题的目的.

**典例剖析**

**一、借助几何意义，实现“数”到“形”的转化**

例1: 已知实数x,y满足$y=x^{2}-2x+2 (-1\leq x\leq 1)$,试求$\frac{y+3}{x+2}$的最值.

难度系数0.6

分析:本题如果看作一般函数求值域的问题，就可以将其转化为求函数$g\left（x\right）=\frac{y+3}{x+2}=\frac{x^{2}-2x+5}{x+2}$ （$-1\leq x\leq 1$）值域的问题，利用分式函数性质或者求导数的方法分析函数单调性，求出其最值。本题也可以结合$k=\frac{y+3}{x+2}=\frac{y-(-3)}{x-(-2)}$的几何意义,求得斜率的最值即可.

**解:**（解法1）

令 $g\left（x\right）=\frac{y+3}{x+2}=\frac{x^{2}-2x+5}{x+2}$ $,（-1\leq x\leq 1）$

则$ g\left(x\right)=\left(x+2\right)+\frac{13}{x+2}-6 , (1\leq x+2\leq 3)$

所以$ y=g\left(x\right) $在$x\in （-1，1）$是单调减函数.

即 $y\_{max}=g\left(-1\right)=8$

1

5

1

O

-1

X

y

B

A

P(-2，-3)

 $y\_{min}=g\left(1\right)=\frac{4}{3}$

（解法2）

由$\frac{y+3}{x+2}=\frac{y-(-3)}{x-(-2)}$的几何意义可知，它表示经过点P（-2，-3）与曲线段AB上的任一点（x,y）的直线的斜率k，如图所示，则$k\_{PA}\leq k\leq K\_{PB}$,由图可知A(1，1),B(-1，5)

所以$k\_{PA}=\frac{1-(-3)}{1-(-2)}=\frac{4}{3}$,$k\_{PB}=\frac{5-(-3)}{-1-(-2)}=8$

所以$\frac{4}{3}\leq k\leq 8$

即$ \frac{4}{3}\leq \frac{y+3}{x+2}\leq 8$

小结：本题是有关最值的问题，如果利用函数思想求解，主要是利用函数的单调性来求最值，可以借助导数或基本初等函数的性质判断其单调性;如果利用所求式子的几何意义来求解，就要联想到斜率的计算公式$k=\frac{y\_{2}-y\_{1}}{x\_{2}-x\_{1}}$,将抽象的“数”的问题转化为直观的“形”的问题.

**二、引入相关参数，实现“形”到“数”的转化**

例2椭圆与x轴的正向相交于点A，O为坐标原点，若这个椭圆上存在点P，使得OP⊥AP。求该椭圆的离心率e的取值范围.

难度系数0.4

分析：本道题是典型的解析几何中求范围的问题，基本思路是构造不等式或不等式组,如果直接设点为P（x,y）构造不等式，变量较多，计算繁杂，所以可以考虑引入参数方程，转化为三角函数构造不等式求其范围.

解：设椭圆上的点P的坐标是（） ($α\ne 0且α\ne π$)， A（a，0）

则. 而OP⊥AP

于是

整理得

解得（舍去），或.

因为，所以.

可转化为，

解得，于是.

故离心率e的取值范围是.

小结：本题的关键是引入参数方程，利用垂直的条件建立方程组，然后利用三角函数的有界性，构造关于e的不等式求解.

**三、巧定主元，实现常量与变量之间的转化**

例3.若不等式 ，对恒成立，求x的取值范围.

难度系数0.55

分析：学生因思维定势常把原不等式视为关于lgx的二次不等式，用分类讨论解答，过程相当繁杂，如果能注意lgx与m的关系，把m变为主元，lgx变为参数，则原不等式可转化为关于m的一元一次不等式问题，构造关于m的一次函数，把问题转化为常规问题：$ f\left(m\right)>0$，$对\left|m\right|\leq 1恒成立，$求x的取值范围，简单易解.

解: 令 （）

因为  （）恒成立.

所以 $f(m)>0，对\left|m\right|\leq 1恒成立$即可.

即 $\left\{\begin{array}{c}f\left(-1\right)=(lgx)^{2}-lgx-2>0\\f\left(1\right)=(lgx)^{2}-3lgx>0\end{array}\right.$

 解得 $0<x<\frac{1}{10}$ 或 $x>1000$

**小结：**本题主要考察不等式恒成立问题，解决题目的关键是突破定势思维，打破常规，对问题中常量与变量的角色加以巧妙置换，问题的处理变得豁然开朗起来，其过程也是极其简单.

**四．准确分类，实现整体到局部的转化**

例3设 ，函数

（1）若 在上单调递增，求的取值范围；

（2）记 为在上的最大值，求的最小值．

难度系数：0.6

分析：（1）在应用分类讨论思想时，注意确定分类标准，本题根据二次函数性质及题目要求，考虑以对称轴所处位置确定出a的范围.

（2）本小题主要考察二次函数中轴动区间定的问题，其分类标准是区间中点,运用单调性，求得最大值，再由分段函数的单调性，求得最小值.

**解：**

（1）设对称轴为$x=-\frac{a}{2}$，

  当时,即$a\geq 0$，在 上单调递增.

 当时，即$a\leq -2$，所以在上单调递减.

综上，或．

(2)

 当时,即，在时取得最大值为.

当时，即$a\leq -1$，所以在取得最大值为0

所以$M\left(a\right)=\left\{\begin{array}{c}a+1,a\geq -1\\0 , a\leq -1\end{array}\right.$

综上可得的最小值为a.

**小结：**本题考查了分类讨论的思想方法，解答中涉及到一元二次函数的图象与性质，不等式的解法等知识点的综合考查，解题的关键是熟练应用一元二次函数的图象与性质进行准确分类，试题综合性强.