

“解三角形”的方法探究与教学建议 ——以2021年全国高考“解三角形”专题为例

李宏伟¹, 张莉娜²

(1. 甘肃省平凉市特殊教育学校 744000; 2. 天水市第一中学, 甘肃 天水 741000)

摘要:针对2020—2022年高考数学试卷中的解三角形试题进行解法分析,对本专题试题的基本类型和特色进行归纳总结,最后给出本专题的复习建议.

关键词:解题分析;备考建议

解三角形是高考必考内容之一.《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》明确指出“借助向量的运算,探索三角形边长与角度的关系,掌握余弦定理、正弦定理.能用余弦定理、正弦定理解决简单的实际问题.”依据课程标准,纵观这几年的高考,解三角形除了在知识点交汇处命题,全面考查学生综合运用三角的知识解决数学问题的能力之外,命题形式还更加趋向于灵活多样,所涉内容也更加丰富多元,这样不仅突出了试题的基础性、综合性,还体现了创新性和应用性,兼容了人文素养,落实了数学学科核心素养,关注了人才选拔要求以及数学在人才培养中的作用.本文对2020—2022年高考数学试卷中相关的数学试题进行分析,从中归纳出该专题内容的试题特征、解题策略和思想方法,据此提出一些高考复习的建议,提高复习的针对性及有效性.

1 全国高考解三角形试题题型与特点

近三年高考数学解三角形试题最经典的命题方式是与平面几何、立体几何、函数与方程、三角函数、恒等变换、平面向量、基本不等式等相结合,主要考查正弦定理、余弦定理、两角差的正弦公式、二倍角公式、诱导公式、三角形面积公式等核心知识,题型全面,考查方式呈现平稳有序、题量适中、难度适当的特点.但是考查还呈现出了与数学文化、自然科学、社会科学等学科间的渗透和交叉,又在试题命制

形式上创新题型,通过结构性不良问题,探索性问题等在思维的灵活性、深刻性,方法的综合性、探究性、创造性,知识的联系、融合等方面进行新的探索,努力破除复习备考中的题海战术和套路训练,引导学生夯实基础、融会贯通、真懂会用,促进学生创新思考勇于探究.

2 典型题目剖析

下面主要从解三角形试题命制方式、试题所涉及的数学知识及数学思想方法、数学能力、核心素养做分析探究.

2.1 经典命题

2.1.1 解三角形与恒等变换、三角函数结合

例1 在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别为

a, b, c . 已知 $a = \sqrt{6}, b = 2c, \cos A = -\frac{1}{4}$.

(1)求 c 的值;

(2)求 $\sin B$ 的值;

(3)求 $\sin(2A - B)$ 的值.

解 (1)已知 $a = \sqrt{6}, b = 2c, \cos A = -\frac{1}{4}$, 由余

弦定理得

$c = 1$.

(2)由 $c = 1, b = 2$, 根据同角三角函数关系式及正弦定理得

收稿日期:2022-06-20

基金项目:甘肃省教育科学“十四五”规划课题“基于核心素养下高中生数学问题提出能力培养的教学实践研究”(课题编号:GS[2022]GHB1199).

作者简介:李宏伟(1973—),男,甘肃平凉人,高级教师.

$$\sin B = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

(3) 已知 $\cos A = -\frac{1}{4}$, 根据同角三角函数关系式及二倍角公式得

$$\sin 2A = -\frac{\sqrt{15}}{8}, \cos 2A = \frac{7}{8}.$$

由同角三角函数关系式及两角差的正弦公式得

$$\sin(2A - B) = \frac{\sqrt{10}}{8}.$$

此题题干简洁清晰, 易于学生入手选择正确的公式解决问题, 解决过程中综合考查了正弦定理、余弦定理、同角三角函数的基本关系, 二倍角公式以及两角差的正弦公式等三角知识, 需要学生整合知识、细致观察、仔细思考、合理变形、恰当选择, 考查了学生逻辑推理、数学运算等核心素养.

2.1.2 解三角形与函数、方程、均值不等式的结合

例2 (2022年新高考全国I卷第18题) 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知

$$\frac{\cos A}{1 + \sin A} = \frac{\sin 2B}{1 + \cos 2B}.$$

(1) 若 $C = \frac{2\pi}{3}$, 求 B ;

(2) 求 $\frac{a^2 + b^2}{c^2}$ 的最小值.

解 (1) 已知 $\frac{\cos A}{1 + \sin A} = \frac{\sin 2B}{1 + \cos 2B}$, 由二倍角公式以及两角差的余弦公式得

$$\cos(A + B) = \sin B.$$

由 $0 < B < \frac{\pi}{2}$ 得

$$B = \frac{\pi}{6}.$$

(2) 由 $c = \frac{\pi}{2} + B, A = \frac{\pi}{2} - 2B$, 结合正弦定理, 诱导公式, 二倍角公式得

$$\frac{a^2 + b^2}{c^2} = 4\cos^2 B + \frac{2}{\cos^2 B} - 5, \text{ 运用均值不等式得}$$

$$\frac{a^2 + b^2}{c^2} \geq 4\sqrt{2} - 5.$$

此题题干简洁, 易于学生在第(1)问选择合适的

公式进行化简、变形及转化, 解决过程综合考察了二倍角公式, 两角和余弦公式, 三角形内角和定理, 三角函数、解方程的知识和方法, 属于中档简单题; 第(2)问求解要选择正弦定理进行边角转化, 需要学生有较高的思维能力去分析转化为余弦函数与对勾函数复合形成的复合函数最值问题, 要有在强烈的函数意识下的较强的变形能力和运算能力, 并熟练掌握各类基本初等函数的图形及性质, 当然, 也可以选择以均值不等式为工具求最值, 为学生解决同一问题提供多种途径, 属于中档较难题. 此题考察了学生逻辑推理、数学运算等核心素养.

2.1.3 解三角形与平面几何相结合

例3 如图1, 在三棱锥 $P-ABC$ 的平面展开图中, $AC = 1, AB \perp AC, AB \perp AD, \angle CAE = 30^\circ$, 则 $\cos \angle FCB = \underline{\hspace{2cm}}$. $AB = AD = \sqrt{3}$.

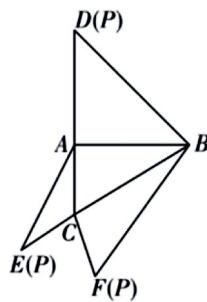


图1

解 由 $AC = 1, AB = \sqrt{3}, AB \perp AC$, 根据勾股定理得

$$BC = 2, BF = BD = \sqrt{6}.$$

由 $AC = 1, AE = AD = \sqrt{3}, \angle CAE = 30^\circ$, 根据余弦定理得

$$CF = CE = 1,$$

由余弦定理得

$$\cos \angle FGB = -\frac{1}{4}.$$

此题是一道填空题, 以一个空间几何体的平面展开图为载体, 数形结合, 考察了勾股定理、余弦定理理解三角形. 要求学生要具备空间形象能力及将空间问题转化为平面几何问题的思维能力, 并能在平面多边形中辗转求解, 最终集中元素在一个三角形中去运算, 因此在解题过程中要观察到位, 分析准确, 解目标明确. 此题考查学生的直观想象、逻辑

推理、数学运算核心素养.

可以发现解三角形经典命题题目结构完整,知识覆盖全面,目标指向明确,要求学生在知识、智力、能力和技能上要有一定的反应速度,综合考察了学生的学科素养.

2.2 结合真实情境,实现学科渗透

例4 (2021全国甲卷第8题)2020年12月8日,中国和尼泊尔联合公布珠穆朗玛峰最新高程为8848.86(单位:m),三角高程测量法是珠峰高程测量方法之一.如图2是三角高程测量法的一个示意图,现有A,B,C三点,且A,B,C在同一水平面上的投影A',B',C'满足 $\angle A'C'B'=45^\circ$, $\angle A'B'C'=60^\circ$.由C点测得B点的仰角为 15° ,BB'与CC'的差为100;由B点测得A点的仰角为 45° ,则A,C两点到水平面A'B'C'的高度差AA'-CC'约为 $(\sqrt{3} \approx 1.732)$ ()

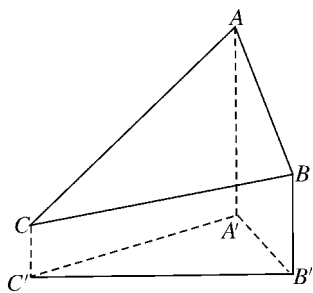


图2

(A)346 (B)373 (C)446 (D)473

解 过C作 $CH \perp BB'$,过B作 $BD \perp AA'$,则 $AA' - CC' = AD + 100$.

由 $\angle BCH = 15^\circ$,解直角三角形得

$$CH = C'B' = \frac{100}{\tan 15^\circ}.$$

再根据正弦定理及两角差的正弦公式可得

$$A'B' = 100(\sqrt{3} + 1) \approx 273,$$

所以

$$AA' - CC' = A'B' + 100 \approx 373.$$

此题以测量珠穆朗玛峰高程的方法之一——三角高程测量法为背景,渗透了自然人文和数学文化,试题设计题情境真实,理论联系实际,将立体几何与解三角形结合,要求考生能正确应用线线关系、线面关系、点面关系等几何知识建构数学模型,将立体几何问题转化为解三角形问题,考察了正余弦定理与

恒等变化的综合应用.解决过程蕴含了化归与转化、数形结合等数学思想方法,考查了数学建模、直观想象、数学抽象、数学运算、逻辑推理学科素养.在试题命制上此题选择了更为复杂的组合体作为载体,因此对学生分析问题解决问题的能力要求会更高,属于中档偏难题.

此类题目通常将人文、社会、自然、数学文化与数学问题相结合,实现了数学学科与其他学科的渗透和交叉.此类问题题干一般较长,要求学生有较强的数学阅读能力,能准确提炼出数学条件与数学问题,体现数学的文化价值,充分发挥育人的功能.

2.3 开放性的设问方式

例5 (2020全国新高考I卷第17题)在(1) $ac = \sqrt{3}$, (2) $c \sin A = 3$, (3) $c = \sqrt{3}b$ 这三个条件中任选一个,补充在下面问题中,若问题中的三角形存在,求c的值;若问题中的三角形不存在,说明理由.

问题:是否存在 $\triangle ABC$,它的内角A,B,C的对边分别为a,b,c,且 $\sin A = \sqrt{3} \sin B$, $C = \frac{\pi}{6}$, _____?

注:如果选择多个条件分别解答,按第一个解答计分.

解 已知 $\sin A = \sqrt{3} \sin B$,根据正弦定理得

$$\frac{a}{b} = \sqrt{3}.$$

设 $b = m$,由余弦定理得

$$c = m.$$

若选择条件(1),由余弦定理得 $c = 1$;若选择条件(2),由余弦定理得 $\cos A = -\frac{1}{2}$,根据同角三角函数关系式、正弦定理可得 $c = 2\sqrt{3}$;若选择条件(3),由正弦定理得 $c = b$,与 $c = \sqrt{3}b$ 矛盾,三角形不存在.

此题是一个结构不良性问题,是近两年高考出现的新题型:所给的三个条件是平行的,无论选择哪个条件,都可解答题目,试题具有一定的开放性,不同的选择可能导致不同的结论,难度有时也会有所不同,此类问题的设置一定程度上让学生参与了命题,是新高考数学在题型和试卷机构上的创新和改革,是从传统的解决问题发生了一定思维上的转变,

学生在解决此类问题时不能盲目选择,要基于自己所学的知识和能力做简单的解题预判,从而选出最易于解决的那一个.此题考查学生的逻辑推理、数学运算核心素养,还考察了学生的创新意识.

此类题目不追求结构完整,追求目标指向开放,要求临场发挥思考,目的是更清晰准确地考察学生的智力水平、思考深度、思维习惯.

3 试题分析结果梳理及教学感悟与备考建议

通过以上分析可以发现高考解三角形数学试题的命制知识交汇点多、覆盖面广、综合性强、设问方式灵活多样的特点,学生在处理问题时易犯审题不仔细、解题切入点不准确、方法选择不好、知识点不熟悉、定理公式不清楚、计算出错、考虑不全面等等错误,基于此,我们要以考促学,对“解三角形”专题的高考复习提出一些建议.

(1)深化概念,构建知识网络,重视知识的本质.高三复习课虽是温习所学过的知识,但更是对所学知识的重新认识,对所学知识的本质的再升华,因此解三角形的复习课需要在单元主题的视角下构建知识网络,细化知识,回顾定理生成的过程,感受定理生成过程中的数学思想和方法,通过对定理的分析和理解以及记忆,进一步促进学生对解三角形本质的认识.

(2)树立经典的解三角形模型意识,加强知识间的联系与整合.平面向量、立体几何、解析几何、数列、函数等主干知识的考查都会涉及到解三角形的知识,甚至数学建模、数学文化的考查也会不经意间与解三角形相结合,因此在解三角形的复习中,要提炼一些经典模型,形成解三角形模型的微专题,通过识别常见三角形命题情境,快速寻找破题思路,让学生能够快速地的解决问题.

(3)夯实直观想象素养,加强运算能力培养.三角形是平面几何图形中最简洁的,从几何角度能解决的问题都不会进行代数运算,很多不规整平面几

何图形通过割补能转化成规整图形,通过连线进一步再转化为三角形,这些几何方式孕育了学生直观想象的核心素养,数形结合地解平面几何问题简化了运算程序.但数学问题的解决终究不能绕开运算,所以在复习的过程中要强化学生运算意识,提升运算能力.

(4)重视思维的灵活性,加强复习的深度和广度.解三角形问题要尽可能多的探索一题多解,还可以进行条件结论互换,扩大缩小条件范围,增加备选条件自命结构不良性问题等变形来拓宽学生思维的宽度,提升学生思维的灵活性.这样做,不仅增强了知识间的关联度,还拓展了复习的深度,提高了深度复习的质量.

(5)重视整理归纳,明晰学生易犯的错误,规范解三角形问题的过程及其表达.解三角形问题题目难度中等,学生还是比较有信心去解答的,其主干知识和常规解法都不会存在太大的问题,但细节的处理还是小错不断,如“忽略角的范围”“忽略大边对大角产生增根”等,问题解答过程中表达不规范,书写不清楚等都是常见的.所以,在复习的过程中要明确学生常犯的错误,加强学生不要抱有侥幸或者不屑一顾的思想意识的教育,督促要踏踏实实地写好每一步作答,规范自己的解答过程.

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版)[S].北京:人民教育出版社,2020:26.
- [2] 陈媛燕.高三数学解三角形复习“一题一课”课例分析——以2021年解三角形高考题为例[J].中学生理科应试,2021,(10):11-12.
- [3] 李波,段喜玲,张晓斌.2021年高考“平面向量”专题解题分析[J].中国数学教育,2021(24):51-58.
- [4] 孙红波,周远方,裴伟.2021年高考“圆锥曲线与方程”专题解题分析[J].中国数学教育,2021(18):26-37.
- [5] 胡能其.例谈高考三角函数及解三角形问题的备考建议[J].高中数理化,2020(2):1-2.