2024届高三第三次调研测试

数学参考答案与评分建议

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1． 已知集合 $M=\{x\,|\,x=k+\frac{1}{2},k\in\mathbf{Z}\}$， $N=\{x\,|\,x=\frac{k}{2}+1,k\in\mathbf{Z}\}$，则

A．$M\subseteq N$　　B．$N\subseteq M$　　C．$M=N$　　D．$M\cap N=\varnothing$

【答案】A

2． 已知三个单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，则向量 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的夹角为

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{2\pi}{3}$　　D．$\frac{5\pi}{6}$

【答案】C

3． 某同学测得连续7天的最低气温分别为1，2，2，m，6，2，8（单位℃），若这组数据的平均数是中位数的2倍，则 $m=$

A．2　　B．3　　C．6　　D．7

【答案】D

4． 已知 z 为复数，则“$z=\overline{z}$”是“$z^2=\overline{z}^2$”的

A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件

C．充要条件　　D．非充分非必要条件

【答案】A

5． 已知 $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=3\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$，则 $\sin 2\theta=$

A．$\frac{3}{5}$　　B．$\frac{4}{5}$　　C．$-\frac{3}{5}$　　D．$-\frac{4}{5}$

【答案】B

6． 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_n+n=2a_n$，则 $a_7=$

A．65　　B．127　　C．129　　D．255

【答案】B

7. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(x+1)$ 为偶函数，$f(x+2)-1$ 为奇函数．若 $f(1)=0$，则 $\sum\limits_{k=1}^{26} f(k)=$

A．23　　B．24　　C．25　　D．26

【答案】C

8. 已知一个正四棱台的上、下底面边长分别为 2，8，侧棱长为 $3\sqrt{5}$，则该正四棱台内半径最大的球的表面积为

A．12π　　B．27π　　C．$\dfrac{64\pi}{9}$　　D．$\dfrac{64\pi}{3}$

【答案】D

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 已知 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，则

A．$f(\pi+x)=f(x)$　　B．$f(\dfrac{3\pi}{8}-x)=f(x)$

C．$x\in(0,\dfrac{\pi}{4})$，$f(x)>1$　　D．$x\in(0,\dfrac{\pi}{4})$，$f'(x)<0$

【答案】AC

10. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为 DD_1 的中点，M 是底面 $ABCD$ 上一点，则

A．M 为 AC 中点时，$PM\perp AC_1$

B．M 为 AD 中点时，PM // 平面 A_1BC_1

C．满足 $2PM=\sqrt{3}DD_1$ 的点 M 在圆上

D．满足直线 PM 与直线 AD 成 30° 角的点 M 在双曲线上

【答案】BCD

11. 已知 $2^a=\log_{\frac{1}{2}}a$，$\log_2 b=(\dfrac{1}{2})^b$，则

A．$a+2^a=b+2^{-b}$　　B．$a+b=2^b+2^{-a}$

C．$2^b+1>\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}$　　D．$2^a>\mathrm{e}^{1-\frac{1}{b}}$

【答案】AD

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12． 若函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+1$ 在 $x=-4$ 处取得极大值，则实数 $a=$_________.

【答案】-2

13． 已知随机变量 $X\sim N(4,4^2)$．若 $P(X<3)=0.3$，则 $P(3<X<5)=$_________，

若 $Y=2X+1$，则 Y 的方差为_________.

【答案】0.4　64

14． 已知 F_1,F_2 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$ 的左、右焦点，P 是 C 上一点．过点 F_1 作直线 PF_1 的垂线 l_1，过点 F_2 作直线 PF_2 的垂线 l_2．若 l_1，l_2 的交点 Q 在 C 上（P,Q 均在 x 轴上方），且 $|PQ|=\frac{8\sqrt{5}}{5}$，则 C 的离心率为_________.

【答案】$\frac{\sqrt{3}}{2}$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15．（13 分）

在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，$(2b-c)\cos A=a\cos C$．

（1）求 A；

（2）若△ABC 的面积为 $\sqrt{3}$，BC 边上的高为 1，求△ABC 的周长．

【解】（1）因为 $(2b-c)\cos A=a\cos C$，

由正弦定理，得 $(2\sin B-\sin C)\cos A=\sin A\cos C$，　　…… 2 分

即 $2\sin B\cos A=\sin A\cos C+\sin C\cos A$，

即 $2\sin B\cos A=\sin B$．　　…… 4 分

因为在△ABC 中，$\sin B\neq 0$，

所以 $\cos A=\frac{1}{2}$．

又因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$．　　…… 6 分

（2）因为△ABC 的面积为 $\sqrt{3}$，

所以 $\frac{1}{2}a\times 1=\sqrt{3}$，得 $a=2\sqrt{3}$．　　…… 8 分

由 $\frac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{3}$，即 $\frac{1}{2}bc\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，所以 $bc=4$． ……10 分

由余弦定理，得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

即 $12=b^2+c^2-bc$，化简得 $(b+c)^2=3bc+12$，

所以 $(b+c)^2=24$，即 $b+c=2\sqrt{6}$，

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=2\sqrt{6}+2\sqrt{3}$． ……13 分

16. （15 分）

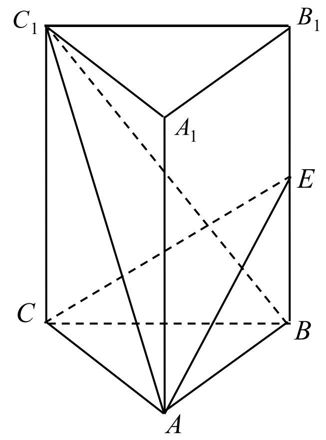
如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=BC=2$，$AB\perp BC$，$CC_1=2\sqrt{3}$，

$\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BB_1}\quad(0<\lambda<1)$．

（1）当 $\lambda=\frac{1}{3}$ 时，求证：$CE\perp$ 平面 ABC_1；

（2）设二面角 $B-AE-C$ 的大小为 θ，

求 $\sin\theta$ 的取值范围.



（1）【证】（法一）因为在直棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$C_1C\perp BC$，$B_1B\perp BC$，

所以在直角 $\triangle C_1CB$ 中，$\tan\angle C_1BC=\frac{CC_1}{BC}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，所以 $\angle C_1BC=60^\circ$．

在直角 $\triangle EBC$ 中，$\tan\angle ECB=\frac{BE}{BC}=\frac{\frac{1}{3}\times2\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\angle BCE=30^\circ$．

又因为 $\angle C_1BC+\angle BCE=90^\circ$，所以 $BC_1\perp CE$． …… 3 分

在直棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$BB_1\perp$ 平面 ABC，

因为 $AB\subset$ 平面 ABC，所以 $B_1B\perp AB$．

又 $AB\perp BC$，$B_1B\cap BC=B$，$BC\subset$ 平面 BCC_1B_1，$BB_1\subset$ 平面 BCC_1B_1，

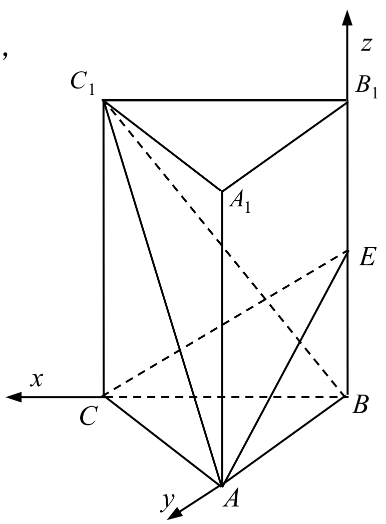
所以 $AB\perp$ 平面 BCC_1B_1．

又 $CE\subset$ 平面 BCC_1B_1，所以 $AB\perp CE$． …… 5 分

又 $AB\cap BC_1=B$， $AB\subset$ 平面 ABC_1， $BC_1\subset$ 平面 ABC_1，

所以 $CE\perp$ 平面 ABC_1． …… 7 分

（法二）以 $\overrightarrow{BC}$， $\overrightarrow{BA}$， $\overrightarrow{BB_1}$ 为基底建立如图所示空间直角坐标系，



则 $B(0,0,0)$， $C(2,0,0)$， $A(0,2,0)$，

$C_1(2,0,2\sqrt{3})$， $E(0,0,2\sqrt{3}\lambda)$．

当 $\lambda=\frac{1}{3}$ 时， $E(0,0,\frac{2\sqrt{3}}{3})$，

所以 $\overrightarrow{AB}=(0,-2,0)$， $\overrightarrow{BC_1}=(2,0,2\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{CE}=(-2,0,\frac{2\sqrt{3}}{3})$． …… 3 分

所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CE}=0$， $\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{CE}=0$，

所以 $CE\perp AB$， $CE\perp BC_1$． …… 5 分

又 $AB\cap BC_1=B$， $AB\subset$ 平面 ABC_1， $BC_1\subset$ 平面 ABC_1，

所以 $CE\perp$ 平面 ABC_1． …… 7 分

（2）【解】$\overrightarrow{AC}=(2,-2,0)$， $\overrightarrow{AE}=(0,-2,2\sqrt{3}\lambda)$，

设平面 AEC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}_1=0,\\ \overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}_1=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x-2y=0,\\ -2y+2\sqrt{3}\lambda z=0,\end{cases}$ 不妨取 $\boldsymbol{n}_1=(\sqrt{3}\lambda,\sqrt{3}\lambda,1)$． ……10 分

因为 $BC\perp$ 平面 ABE，所以平面 ABE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(2,0,0)$． 11 分

所以 $\left|\cos\theta\right|=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\times|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{\sqrt{3}\lambda}{\sqrt{6\lambda^2+1}}$，

所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{3\lambda^2}{6\lambda^2+1}}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2(6\lambda^2+1)}}$． ……13 分

又因为 $0<\lambda<1$，所以 $\sin\theta\in(\frac{2}{7}\sqrt{7},1)$． ……15 分

17. （15 分）

已知函数 $f(x)=(1+x)^k-kx-1$（$k>1$）.

（1）若 $x>-1$，求 $f(x)$ 的最小值；

（2）设数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 S_n，若 $a_n=(1+\frac{1}{2^n})^n$，求证：$S_n-n\geqslant 2-\frac{n+2}{2^n}$.

【解】（1）$f'(x)=k(1+x)^{k-1}-k=k\left[(1+x)^{k-1}-1\right]$. …… 2 分

因为 $x>-1$，$k>1$，

令 $f'(x)=0$，则 $(1+x)^{k-1}-1=0$，所以 $x=0$. …… 3 分

当 $-1<x<0$ 时，$(1+x)^{k-1}<1$，所以 $f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减；

当 $x>0$ 时，$(1+x)^{k-1}>1$，所以 $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. …… 5 分

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(0)=0$.

所以，$k>1$ 时，$f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上的最小值为 0. …… 7 分

（2）当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=\frac{3}{2}$，此时 $S_n-n=2-\frac{n+2}{2^n}$.

当 $n\geqslant 2$ 时，因为 $\frac{1}{2^n}>0$，由（1）知，$a_n=(1+\frac{1}{2^n})^n\geqslant\frac{n}{2^n}+1$，

所以 $S_n-n\geqslant\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}$. ……10 分

设 $T_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}$，

则 $\frac{1}{2}T_n=\quad\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}$，

两式相减，得 $\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}++\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}$ ……12 分

$$=\frac{\frac{1}{2}\left[1-(\frac{1}{2})^n\right]}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{n+2}{2^{n+1}},$$

所以 $T_n=2-\frac{n+2}{2^n}$.

所以 $S_n - n \geqslant 2 - \dfrac{n+2}{2^n}$（$n \geqslant 2$）.

综上，对任意 $n \in \mathbf{N}^*$，$S_n - n \geqslant 2 - \dfrac{n+2}{2^n}$. ……15 分

18.（17 分）

已知抛物线 $C: x^2 = 2py(p>0)$ 的焦点为 F，直线 l 过点 F 交 C 于 A, B 两点，C 在 A, B 两点的切线相交于点 P，AB 的中点为 Q，且 PQ 交 C 于点 E．当 l 的斜率为 1 时，$|AB| = 8$.

（1）求 C 的方程；

（2）若点 P 的横坐标为 2，求 $|QE|$；

（3）设 C 在点 E 处的切线与 PA, PB 分别交于点 M, N，求四边形 $ABNM$ 面积的最小值.

【解】（1）由题意，直线 l 的斜率必存在.

设直线 l 的方程为 $y = kx + \dfrac{p}{2}$，$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，

联立 $\begin{cases} y = kx + \dfrac{p}{2}, \\ x^2 = 2py, \end{cases}$ 得 $x^2 - 2pkx - p^2 = 0$，（*），所以 $\begin{cases} \Delta > 0, \\ x_1 + x_2 = 2pk, \\ x_1 x_2 = -p^2. \end{cases}$

当 $k = 1$ 时，$x_1 + x_2 = 2p$， …… 3 分

此时 $|AB| = y_1 + y_2 + p = (x_1 + \dfrac{p}{2}) + (x_2 + \dfrac{p}{2}) + p = (x_1 + x_2) + 2p = 8$，

所以 $4p = 8$，即 $p = 2$.

（另法：$|AB| = \sqrt{1+k^2}\,|x_1 - x_2| = \sqrt{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2}$

$= \sqrt{2}\sqrt{(2p)^2 - 4(-p^2)} = 4p = 8$，即 $p = 2$．）

所以 C 的方程为 $x^2 = 4y$. …… 5 分

（2）由（1）知，AB 中点 $Q(2k, 2k^2+1)$. …… 7 分

因为 $x^2 = 4y$，所以 $y' = \dfrac{x}{2}$，

则直线 PA 方程为 $y - y_1 = \dfrac{x_1}{2}(x - x_1)$，即 $y = \dfrac{1}{2}x_1 x - \dfrac{1}{4}x_1^2$，

同理，直线 PB 方程为 $y=\frac{1}{2}x_2x-\frac{1}{4}x_2^2$，

所以 $x_P=\dfrac{\frac{1}{4}x_1^2-\frac{1}{4}x_2^2}{\frac{1}{2}(x_1-x_2)}=\dfrac{x_1+x_2}{2}=2k$，

$y_P=\dfrac{x_1(x_1+x_2)}{4}-\dfrac{x_1^2}{4}=\dfrac{x_1x_2}{4}=-1$，所以 $P(2k,-1)$． …… 9 分

因为 $x_P=2$，$2k=2$，即 $k=1$，此时 $Q(2,3)$，$P(2,-1)$，

所以直线 PQ 的方程为 $x=2$，

代入 $x^2=4y$，得 $y=1$，所以 $E(2,1)$，

所以 $|QE|=2$． ……11 分

（3）由（2）知 $Q(2k,2k^2+1)$，$P(2k,-1)$，

所以直线 PQ 方程为 $x=2k$，

代入 $x^2=4y$，得 $y=2k^2$，所以 $E(2k,2k^2)$，所以 E 为 PQ 的中点.

因为 C 在 E 处的切线斜率 $y'=\frac{1}{2}\times 2k=k$，

所以 C 在 E 处的切线平行于 AB，

又因为 E 为 PQ 的中点，所以 $S_{四边形ABNM}=\frac{3}{4}S_{\triangle ABP}$． ……13 分

由（1）中（*）式得 $x^2-4kx-4=0$，所以 $x_1+x_2=4k$，

因为直线 AB 方程为 $y=kx+1$，

所以 $|AB|=y_1+y_2+p=(kx_1+1)+(kx_2+1)+2=k(x_1+x_2)+4=4k^2+4$．

又 $P(2k,-1)$ 到直线 AB 的距离 $h=\dfrac{|2k^2+2|}{\sqrt{k^2+1}}=2\sqrt{k^2+1}$， ……15 分

所以 $S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}|AB|\cdot h=\frac{1}{2}\cdot(4k^2+4)\cdot 2\sqrt{k^2+1}=4(k^2+1)^{\frac{3}{2}}\geqslant 4$，

（当且仅当 $k=0$ 时取“=”）

所以 $S_{四边形ABNM}=\frac{3}{4}S_{\triangle ABP}\geqslant 3$，

所以四边形 $ABNM$ 的面积的最小值为 3. ……17 分

19. （17 分）

“熵”常用来判断系统中信息含量的多少，也用来判断概率分布中随机变量的不确定性大小，一般熵越大表示随机变量的不确定性越明显．定义：随机变量 X 对应取值 x_1 的概率为 $p_i=P(X=x_i)$，其单位为 bit 的熵为 $H(X)=-\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\log_2 p_i$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=1$．（当 $p_i=0$，规定 $p_i\log_2 p_i=0$．）

（1）若抛掷一枚硬币 1 次，正面向上的概率为 $m(0<m<1)$，正面向上的次数为 X，分别比较 $m=\dfrac{1}{2}$ 与 $m=\dfrac{1}{4}$ 时对应 $H(X)$ 的大小，并根据你的理解说明结论的实际含义；

（2）若抛掷一枚质地均匀的硬币 n 次，设 X 表示正面向上的总次数，Y 表示第 n 次反面向上的次数（0 或 1）． $p(x_1,y_1)$ 表示正面向上 x_1 次且第 n 次反面向上 y_1 次的概率，如 $n=3$ 时，$p(0,1)=\dfrac{1}{8}$．对于两个离散的随机变量 X，Y，其单位为 bit 的联合熵记为

$$H(X,Y)=-\left(\sum_{i=1}^{n}p(x_i,0)\log_2 p(x_i,0)+\sum_{i=1}^{n}p(x_i,1)\log_2 p(x_i,1)\right)，且\sum_{i=1}^{n}p(x_i,0)+\sum_{i=1}^{n}p(x_i,1)=1．$$

（i）当 n=3时，求 $H(X,Y)$ 的值；

（ii）求证：$H(X,Y)<n-\dfrac{1}{2^{n-1}}(n\geqslant 3)$．

【解】（1）$m=\dfrac{1}{2}$ 时，$H(X)=-\sum\limits_{i=1}^{2}p_i\log_2 p_i=-\left[(1-\dfrac{1}{2})\cdot\log_2(1-\dfrac{1}{2})+\dfrac{1}{2}\cdot\log_2\dfrac{1}{2}\right]=1$，

$m=\dfrac{1}{4}$ 时，

$H(X)=-\sum\limits_{i=1}^{2}p_i\log_2 p_i=-\left[(1-\dfrac{1}{4})\cdot\log_2(1-\dfrac{1}{4})+\dfrac{1}{4}\cdot\log_2\dfrac{1}{4}\right]=2-\dfrac{3}{4}\log_2 3$． ⋯ 4 分

因为 $3^3>2^4$，所以 $\log_2 3>\dfrac{4}{3}$，所以 $2-\dfrac{3}{4}\log_2 3<1$． ⋯⋯ 5 分

说明硬币质地均匀时，抛掷正面向上的不确定性更大． ⋯⋯ 6 分

（2）（i）当 n=3时，(X,Y) 的分布列：

(X,Y)	$(1,0)$	$(2,0)$	$(3,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$	$(2,1)$
p	$(\frac{1}{2})^3$	$C_2^1(\frac{1}{2})^3$	$(\frac{1}{2})^3$	$(\frac{1}{2})^3$	$C_2^1(\frac{1}{2})^3$	$(\frac{1}{2})^3$

$H(X,Y)=-\left[4\times(\dfrac{1}{2})^3\cdot\log_2(\dfrac{1}{2})^3+2\times C_2^1(\dfrac{1}{2})^3\cdot\log_2(C_2^1(\dfrac{1}{2})^3)\right]=\dfrac{5}{2}$． ⋯⋯10 分

（ii）当 Y=0 时，第 n 次正面向上，前 $n-1$ 次中有 x_i-1 次正面向上，

所以 $p(x_i,0)=\mathrm{C}_{n-1}^{x_i-1}(\frac{1}{2})^n$，

所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}p(x_i,0)\log_2 p(x_i,0)=\sum\limits_{x_i=1}^{n}\mathrm{C}_{n-1}^{x_i-1}(\frac{1}{2})^n\log_2(\mathrm{C}_{n-1}^{x_i-1}(\frac{1}{2})^n)$

$$=\sum_{x_i=0}^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^{x_i}(\frac{1}{2})^n\log_2(\mathrm{C}_{n-1}^{x_i}(\frac{1}{2})^n).$$

当 Y=1 时，第 n 次反面向上，前 $n-1$ 次中有 x_i 次正面向上，

所以 $p(x_i,1)=\mathrm{C}_{n-1}^{x_i}(\frac{1}{2})^n$，

所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}p(x_i,1)\log_2 p(x_i,1)=\sum\limits_{x_i=0}^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^{x_i}(\frac{1}{2})^n\log_2(\mathrm{C}_{n-1}^{x_i}(\frac{1}{2})^n)$.　　……13 分

所以 $H(X,Y)=-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}p(x_i,0)\log_2 p(x_i,0)+\sum\limits_{i=1}^{n}p(x_i,1)\log_2 p(x_i,1)\right)$

$$=-\left(\sum_{x_i=0}^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^{x_i}(\frac{1}{2})^n\log_2(\mathrm{C}_{n-1}^{x_i}(\frac{1}{2})^n)\times 2\right)$$

$$=(-2)\times\sum_{x_i=0}^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^{x_i}(\frac{1}{2})^n\log_2(\mathrm{C}_{n-1}^{x_i}(\frac{1}{2})^n)$$

$$=(-2)\times(\frac{1}{2})^n\left[\sum_{x_i=0}^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^{x_i}\log_2\mathrm{C}_{n-1}^{x_i}-n\sum_{x_i=0}^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^{x_i}\right]$$

$$=-(\frac{1}{2})^{n-1}\left[\sum_{x_i=0}^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^{x_i}\log_2\mathrm{C}_{n-1}^{x_i}-n\cdot 2^{n-1}\right]$$

$$=n-(\frac{1}{2})^{n-1}\sum_{x_i=0}^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^{x_i}\log_2\mathrm{C}_{n-1}^{x_i}.$$　　……15 分

由 $n\geqslant 3$，$\sum\limits_{x_i=0}^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^{x_i}\log_2\mathrm{C}_{n-1}^{x_i}\geqslant 0+(n-1)\log_2(n-1)+\mathrm{C}_{n-1}^{2}\log_2\mathrm{C}_{n-1}^{2}>1$，

所以 $H(X,Y)=n-(\frac{1}{2})^{n-1}\sum\limits_{x_i=0}^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^{x_i}\log_2\mathrm{C}_{n-1}^{x_i}<n-\frac{1}{2^{n-1}}(n\geqslant 3)$.　　……17 分