同构方程视角下高中数学几何试题解题方法

卢贤慧（江西省赣州市第一中学　341000）

【摘　要】　随着近年高考的发展与变迁，解析几何试题的形式也在不断演变．传统的一点一线一方程的大题逐渐减少，取而代之的是涉及大量联立方程和计算的题目，这给学生解题带来了一定的难度，使一些学生对此感到畏惧．本文对解析几何试题进行解答与分析，这些同构方程类型是学生在解析几何问题中经常遇到的，掌握其中的解题方法可以帮助学生更好地应对这类题目．

【关键词】　同构方程；高中数学；解题教学

1　熟悉知识背景，了解方法本质

同构式是指在除了变量不同的情况下，其余结构相同的表达式．同构式的本质特征是可替换性．同构式在方程、不等式、解析几何等领域中有着广泛的应用和表现形式，比如对于方程 $f(a)=0$ 和 $f(b)=0$，当它们呈现出同构特征时，a 和 b 是方程 $f(x)=0$ 的两个根．下面以典型例题介绍此方法．

比如，在证明不等式 $a\ln x\leqslant x\ln a$（其中 $a>0$）时，可以通过将 a 和 x 分离到不等式的两边，得到 $\dfrac{\ln(x)}{x}\leqslant\dfrac{\ln(a)}{a}$，呈现出同构式的特征．可以构造函数 $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$ 来解决该不等式．

再比如将，如果点 $A(x_1,y_1)$ 和点 $B(x_2,y_2)$ 同时满足 $AM=\lambda MB$ 和 $AN=-\lambda NB$，这表现出同构式的特征，可以得到 $x_M=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$，$y_M=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$，$x_N=\dfrac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda}$，$y_N=\dfrac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda}$．最后，如果点 $M(x_1,y_1)$ 满足方程 $x_0x_1+y_0y_1+c=0$，点 $N(x_2,y_2)$ 满足方程 $x_0x_2+y_0y_2+c=0$，那么过点 M 和 N 的直线方程为 $x_0x+y_0y+c=0$．

同构是一种常见的解题方法，体现了数学的对称和谐性．同构式在解析几何问题中扮演着重要的角色．通过灵活运用同构式这一法宝，可以将复杂的问题简化．这样做可以使问题更易于理解和解决，实现小投入却能获得巨大成果的效果．同构式的运用相当于施展了数学中的“四两拨千斤”之策略，从而帮助我们更高效地解决解析几何问题．

2　探究典型例题，把握解题方法

2.1　双切圆同构

例1　已知抛物线 $C_1:x^2=y$ 和圆 $C_2:x^2+(y-4)^2=1$，其中圆 C_2 的圆心为 M．点 P 是抛物线 C_1 上的一点（与原点不重合）．过点 P 做圆 C_2 的两条切线，交抛物线 C_1 于点 A 和点 B．若 $MP\perp AB$，求 PM 的方程．

分析　在解析这道题时，如果尝试直接求解点 A 和点 B 的坐标，并计算斜率 k_{AB}，将会涉及大量的计算．为了简化问题，我们可以进一步分析，考虑利用切线与圆相切以及圆心到直线距离等于半径的隐含条件来构造同构式．然而，如何合理地表示切线方程是关键所在．实际上，我们可以运用韦达定理的思想，反向推导出两条切线的方程表达式．

解　假设 $P(x_0,y_0)$，

令 $PA:y=kx+m$ 代入抛物线方程 $x^2=y$，

得 $x^2-kx-m=0$，

因此 $x_0+x_A=k$，$x_0x_A=-m$．

因此，反向表示 PA 的方程为 $y-kx-m=0$，

即 $(x_0+x_A)x-y-x_0x_A=0$①．

由于 PA 与圆 C_2 相切，点 M 到 PA 的距离 $d=\dfrac{|4+x_0x_A|}{\sqrt{(x_0+x_A)^2+1}}=1$，

整理得 $6x_0x_A+(x_0^2-1)y_A+15-x_0^2=0$. ②

同样地，点 B 满足方程：$(x_0+x_B)x-y-x_0x_B=0$③，

再由 PB 也满足相切条件，因此点 B 同样满足方程：

$6x_0x_B+(x_0^2-1)y_B+15-x_0^2=0$ ④.

显然，③④ 为同构式.

因此，A，B 均满足同构方程：

$6x_0x+(x_0^2-1)y+15-x_0^2=0$.

因为 $PM\perp AB$，

所以 $x_0^2-4x_0\cdot\dfrac{6x_0}{1-x_0^2}=-1$，

解得 $x_0=\pm\dfrac{\sqrt{115}}{5}$.

因此，PM 的方程为 $y=\pm\dfrac{3\sqrt{115}}{115}x+4$.

点评　在上述步骤中，关键是反向表示 PA 和 PB 方程. 实际上，抛物线 $x^2=2py$ 与直线 l 相交于 A，B 两点. 为了得到同构方程，将 AB 方程表示为 $(x_A+x_B)x-2py-x_Ax_B=0$ 是解题的关键.

2.2　切线同构

例 2　设点 P 为直线 $y=x-3$ 上的动点，过点 P 作抛物线 $x^2=2y$ 的两条切线，切点为 A，B，需要证明直线 AB 过定点.

分析　这道题实际上涉及阿基米德三角形中切点弦过定点的问题. 题目要求找出抛物线的两条切线，并证明直线 AB 过一个固定点. 我们可以利用同构式来表示切点弦的直线方程. 在这里，实际上不需要同时解直线和曲线方程来构造同构式，因为抛物线上任意点的切线斜率与该点的坐标有关.

证明　考虑点 $P(x_0,y_0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

由于抛物线方程为 $y=\dfrac{1}{2}x^2$，

可以求得其导数为 $y'=x$.

因此，斜率 $k_{AP}=x_1$，$k_{BP}=x_2$.

因此，点 A 和 B 的切线方程分别为：

$$\begin{cases}y-y_1=x_1(x-x_1),\\ y-y_2=x_2(x-x_2),\end{cases}$$

即 $\begin{cases}xx_1=y+y_1,\\ xx_2=y+y_2,\end{cases}$

由于 P 点同时位于 PA 和 PB 上，

所以有：$\begin{cases}xx_1=y_0+y_1,\\ xx_2=y_0+y_2,\end{cases}$

因此，A 和 B 满足相同的方程 $x_0x=y_0+y$.

根据这个结论，直线 AB 的方程为：$x_0x=y_0+y$，

也可以表示为 $y=x_0(x-1)+3$.

因此，直线 AB 经过定点(1，3). 得证.

点评　这种方法的优势在于计算量较小，不需要复杂的代数运算和求解过程. 通过巧妙地选择和构造，我们可以得到所需的结果. 这种技巧性的方法在解题过程中起到了关键的作用，使得问题的求解更加简洁和高效.

3　结语

同构式的巧妙运用可以大大提高解题问题的效率，让解析几何的求解过程更加直观和简洁. 它为我们提供了一种有效的思维工具，帮助我们发现问题中的隐藏规律和几何性质，从而找到解决问题的途径. 因此，掌握同构式的构造和运用技巧，能够在解析几何试题中发挥重要作用，为学生带来便捷的解题体验，并帮助学生更好地理解几何概念和性质.

【课题信息：本文系“江西省教育科学“十四五”规划2022年度中小学系列课题《基于核心素养的高中数学思维可视化的实践与研究》，课题批准号：22PTYB091】

参考文献：

[1] 秦凯. 本真思维在高中数学几何教学中的应用研究[J]. 数理化学习(教育理论)，2022(10)：13－14＋17.

[2] 王丽杰. 高中数学几何解题技巧之“数”“形”结合策略[J]. 数理天地(高中版)，2022(20)：44－45.

[3] 林文瑛. 高中数学几何教学的有效策略 [J]. 名师在线(中英文)，2022(15)：34－36.

[4] 陈玉苗. 几何画板在高中数学函数中的辅助教学使用策略研究[J]. 数理化解题研究，2022(12)：35－37.