千年古图蕴藏题库*

——阿基米德三角形演绎高考题

●方亚斌　（南头中学　广东深圳　518052)

作者介绍: 湖北省特级教师,湖北省教育科研百佳个人之一,广东省南粤优秀教师,深圳市首批名师工作室主持人,深圳市政府特殊津贴专家,深圳市地方级领军人才,深圳市首批中小学教师继续教育课程建设专家库入库专家,深圳市南山区高三数学名师工作室主持人. 主持广东省、深圳市教科研课题 3 个,出版个人论著 10 余本,在 30 余家中学数学学科专业杂志上发表教育教学论文 200 余篇,其中 10 余篇被中国人民大学书报资料中心全文转载. 多次获湖北省、广东省数学竞赛优秀教练员、深圳市高考先进个人称号. 曾被聘为《中学数学》、《学科教育》等多家杂志社特约编辑、第2 ~4 届“希望杯”全国数学邀请赛命题委员会委员.

摘　要: 文章以两个定理及推论的形式归纳出有关阿基米德三角形中点、线、面积的 8 条常用性质,从 17 个角度归纳出由阿基米德三角形衍生的 5 种类型的高考试题,探究同宗同源问题的命题规律和解题规律.

关键词: 阿基米德三角形; 高考题; 性质; 应用

中图分类号: O123. 1　　文献标识码: A　　文章编号: 1003 - 6407(2017) 07-01-06

1　阿基米德三角形的性质

抛物线的弦与过弦的端点的两条切线所围的三角形,称为阿基米德三角形.

阿基米德三角形的得名,是因为阿基米德本人最早利用逼近的思想证明了如下结论:

结论 1　抛物线的弦与抛物线所围成的封闭图形的面积,等于抛物线的弦与过弦的端点的两条切线所围的三角形面积的$\frac{2}{3}$(见本文推论 2) .

为了后文的应用方便,我们先对阿基米德三角形相关性质做些归纳. 下面的讨论,我们仅以抛物线 $x^2 = 2py$ (其中 $p > 0$) 为例,抛物线上两个不同的点 A,B 的坐标分别为(x_1,y_1) ,(x_2,y_2) ,以 A,B 为切点的切线 PA,PB 相交于点 P,我们称弦 AB 为阿基米德三角形$\triangle PAB$ 的底边(如图 1 所示) .

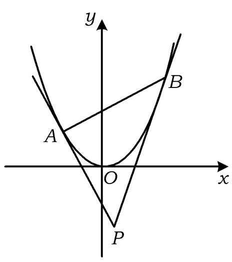

图 1

定理 1　1) 点 P 的坐标为$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_1x_2}{2p}\right)$;

2) 底边 AB 所在的直线方程为

$$(x_1 + x_2) x - 2py - x_1x_2 = 0;$$

3) $\triangle PAB$ 的面积为 $S_{\triangle PAB} = \frac{|x_1 - x_2|^3}{8p}$.

证明　1) 过点 A,B 的切线方程分别为

$$y - \frac{x_1^2}{2p} = \frac{x_1}{p}(x - x_1) ,\quad y - \frac{x_2^2}{2p} = \frac{x_2}{p}(x - x_2) ,$$

联立这两个方程,消去 y,可得 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$,再将其代入点 A 处的切线方程,可得

$$y = y_1 + \frac{x_1}{p}(x - x_1) = \frac{x_1^2}{2p} + \frac{x_1}{p}\left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_1\right) = \frac{x_1x_2}{2p},$$

* 收文日期: 2017-03-21; 修订日期: 2017-04-24

基金项目: 2016 年广东省深圳市中小学遴选类“好课程”(深教〔2016〕619 号) 部分内容

作者简介: 方亚斌(1964 -) ,男,湖北黄梅人,湖北省特级教师. 研究方向: 数学教育.

这表明点 P 的坐标为 $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_1x_2}{2p}\right)$.

2) 直线 AB 的斜率为

$$k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\frac{x_2^2}{2p}-\frac{x_1^2}{2p}}{x_2-x_1}=\frac{x_1+x_2}{2p},$$

故直线 AB 的方程为

$$y-\frac{x_1^2}{2p}=\frac{x_1+x_2}{2p}(x-x_1),$$

化简得 $$(x_1+x_2)x-2py-x_1x_2=0.$$

3) 由定理1的1),2)可得点 P 到直线 AB 的距离为

$$d=\frac{\left|(x_1+x_2)\cdot\frac{x_1+x_2}{2}-2p\cdot\frac{x_1x_2}{2p}-x_1x_2\right|}{\sqrt{(x_1+x_2)^2+4p^2}}=\frac{(x_1-x_2)^2}{2\sqrt{(x_1+x_2)^2+4p^2}}.$$

又 $$|AB|=\sqrt{1+\left(\frac{x_1+x_2}{2p}\right)^2}\cdot|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{(x_1+x_2)^2+4p^2}}{2p}\cdot|x_1-x_2|,$$

可得 $\triangle PAB$ 的面积

$$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{(x_1+x_2)^2+4p^2}}{2p}\cdot|x_1-x_2|\cdot\frac{(x_1-x_2)^2}{2\sqrt{(x_1+x_2)^2+4p^2}}=\frac{|x_1-x_2|^3}{8p}.$$

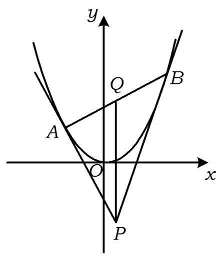

图2

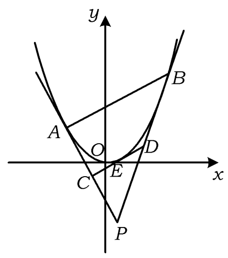

图3

推论1 1) 阿基米德三角形底边上的中线平行(重合)于抛物线的对称轴.

2) 若点 P 的坐标为 (x_0,y_0),则底边 AB 的直线方程为 $x_0x-p(y+y_0)=0$.

证明 1) 如图2,设点 Q 为底边 AB 的中点,由定理1可知,点 P 与点 Q 的横坐标相同,故 PQ 与 y 轴平行或重合.

2) 将定理1结论2)中直线 AB 方程 $(x_1+x_2)x-2py-x_1x_2=0$ 化为

$$\frac{x_1+x_2}{2}\cdot x-p\left(y+\frac{x_1x_2}{2p}\right)=0,$$

可得 $$\frac{x_1+x_2}{2}=x_0,\quad \frac{x_1x_2}{2p}=y_0,$$

代入即得直线 AB 的方程为 $x_0x-p(y+y_0)=0$.

定理2 如图3,若 E 为抛物线弧 AB 上的动点,点 E 处的切线与 PA,PB 分别交于点 C,D,则 $\frac{|AC|}{|CP|}=\frac{|CE|}{|ED|}=\frac{|PD|}{|DB|}$.

证明 由定理1,知点 P,C,D 的横坐标分别为 $x_P=\frac{x_1+x_2}{2},x_C=\frac{x_1+x_E}{2},x_D=\frac{x_2+x_E}{2}$,从而

$$\frac{|AC|}{|CP|}=\frac{|x_C-x_1|}{|x_P-x_C|}=\frac{\left|\frac{x_1+x_E}{2}-x_1\right|}{\left|\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{x_1+x_E}{2}\right|}=\frac{|x_E-x_1|}{|x_2-x_E|},$$

$$\frac{|CE|}{|ED|}=\frac{|x_E-x_C|}{|x_D-x_E|}=\frac{\left|x_E-\frac{x_1+x_E}{2}\right|}{\left|\frac{x_E+x_2}{2}-x_E\right|}=\frac{|x_E-x_1|}{|x_2-x_E|},$$

从而 $$\frac{|AC|}{|CP|}=\frac{|CE|}{|ED|},$$

同理可得 $$\frac{|PD|}{|DB|}=\frac{|CE|}{|ED|},$$

于是 $$\frac{|AC|}{|CP|}=\frac{|CE|}{|ED|}=\frac{|PD|}{|DB|}.$$

推论2 1) 若 E 为抛物线弧 AB 上的动点,抛物线在点 E 处的切线与阿基米德三角形 $\triangle PAB$ 的边 PA,PB 分别交于点 C,D,则 $\frac{S_{\triangle EAB}}{S_{\triangle PCD}}=2$.

2) 抛物线和它的一条弦所围成的面积,等于以此弦为底边的阿基米德三角形面积的 $\frac{2}{3}$.

证明 1) 设 $\frac{|AC|}{|CP|}=\frac{|CE|}{|ED|}=\frac{|PD|}{|DB|}=\lambda$,记 $S_{\triangle PCE}=S$,则

$$\frac{S_{\triangle CAE}}{S}=\frac{|AC|}{|CP|}=\lambda,$$

即 $$S_{\triangle CAE}=\lambda S,$$

同理可得 $$S_{\triangle PED}=\frac{S}{\lambda},\quad S_{\triangle DEB}=\frac{S}{\lambda^2}.$$

又因为 $$\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle PCD}}=\frac{|PA|\cdot|PB|}{|PC|\cdot|PD|}=\frac{\lambda+1}{1}\cdot\frac{\lambda+1}{\lambda}=\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda},$$

于是 $$S_{\triangle PAB}=\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda}S_{\triangle PCD}=\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda}\left(S+\frac{S}{\lambda}\right)=$$

$\dfrac{(\lambda+1)^3}{\lambda^2}S$,

所以 $S_{\triangle EAB}=S_{\triangle PAB}-S_{\triangle PCD}-S_{\triangle CAE}-_{\triangle DBE}=\dfrac{(\lambda+1)^3}{\lambda^2}S-\left(S+\dfrac{S}{\lambda}\right)-\lambda S-\dfrac{S}{\lambda^2}=\dfrac{2(\lambda+1)}{\lambda}S$,

$$S_{\triangle PCD}=S+\frac{S}{\lambda}=\frac{\lambda+1}{\lambda}S,$$

从而 $$\frac{S_{\triangle EAB}}{S_{\triangle PCD}}=2.$$

2) 设 C 是阿基米德三角形$\triangle PAB$ 的边 PA 的中点,过点 C 作抛物线的切线,切点为 E,CE 交 PB 于点 D. 由定理 2,可得$|CE|=|ED|$,$|PD|=|DB|$. 设 Q 为 AB 的中点,则点 P,E,Q 共线,且$|PE|=|QE|$. 这表明在阿基米德三角形中,与底边平行的中位线是抛物线的一条切线,且切点就是这条切线与底边上中线的交点(如图 4). 根据此结论,可知

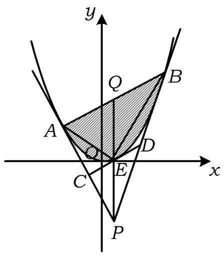

图 4

$$S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABP},$$

$$S_{\triangle ACE}=S_{\triangle PCE}=\frac{1}{2}S_{\triangle AQE}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABE}=\frac{1}{8}S_{\triangle ABP},$$

同理可得 $$S_{\triangle BDE}=\frac{1}{8}S_{\triangle ABP}.$$

对阿基米德三角形$\triangle AEC$ 和$\triangle BED$,分别作与底边平行的中位线,有与上面相同的结果,……类似这样无限操作下去,抛物线和弦 AB 围成的面积就等于无限多条边的凸多边形的面积,且可无限分割求和[1],即

$$S=S_{\triangle ABE}+\left(\frac{1}{2}S_{\triangle AEC}+\frac{1}{2}S_{\triangle BED}\right)+\cdots=\frac{1}{2}S_{\triangle ABP}+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{8}S_{\triangle ABP}+\cdots=\frac{1}{2}S_{\triangle ABP}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots\right)=\frac{1}{2}S_{\triangle ABP}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABP}.$$

2　阿基米德三角形的应用

自公元前 3 世纪至今,历经了两千多年的风霜雨雪,阿基米德三角形尤如一颗闪烁的明珠,以其深刻的背景、丰富的内涵产生出了无穷魅力,在数学发展的历史长河中不断闪烁出真理的光辉. 这个两千多年的古老图形,如同一个题库,里面蕴藏着各级各类考试命题和高考命题的素材. 由阿基米德三角形衍生出的高考题,主要有以下 5 种类型:

2.1　线段长度问题

视角 1　给定抛物线 $x^2=4y$,并设阿基米德三角形$\triangle PAB$ 的底边 AB 过焦点 $F(0,1)$,则由定理 1 可得$(x_1+x_2)\cdot 0-4\times 1-x_1x_2=0$,即 $x_1x_2=-4$. 再由定理 1,得点 P 的坐标为$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},-1\right)$,从而

$$|FP|^2=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+4=\frac{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2}{4}+4=\frac{x_1^2+x_2^2}{4}+2=\frac{x_1^2}{4}+\frac{4}{x_1^2}+2=\left(\frac{x_1}{2}+\frac{2}{x_1}\right)^2,$$

因此 $$|FP|=\frac{|x_1|}{2}+\frac{2}{|x_1|}.$$

视角 2　现考虑 n 个过抛物线 $x^2=4y$ 焦点 F 的阿基米德三角形$\triangle P_iA_iB_i$(其中 $i=1,2,\cdots,n$),计算这 n 个三角形的顶点 P_i 到焦点 F 的距离之和,根据上面的结论,得

$$|FP_1|+|FP_2|+\cdots+|FP_n|=\frac{1}{2}(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)+2\left(\frac{1}{|x_1|}+\frac{1}{|x_2|}+\cdots+\frac{1}{|x_n|}\right).$$

为了方便求和,不妨给定 A_i 的横坐标为 $x_i=2^i$(其中 $i=1,2,\cdots,n$),由等比数列求和公式得

$$|FP_1|+|FP_2|+\cdots+|FP_n|=\frac{1}{2}(2+2^2+\cdots+2^n)+2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=(2^n-1)+(2-2^{1-n})=2^n-2^{-n+1}+1.$$

从视角 1 和视角 2 切入,可编拟:

题 1　如图 5,对每个正整数 n,$A_n(x_n,y_n)$是抛物线 $x^2=4y$ 上的点,过焦点 F 的直线 FA_n 交一点 $B_n(s_n,t_n)$.

1) 试证: $x_ns_n=-4$(其中 $n\geqslant 1$);

2) 取 $x_n=2^n$,并记 C_n 为抛物线上分别以 A_n 与 B_n 为切点的两条切线的交点,试证:

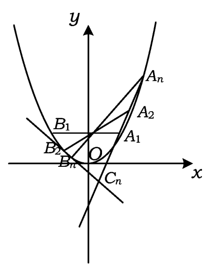

图 5

$$|FC_1|+|FC_2|+\cdots+|FC_n|=2^n-2^{-n+1}+1.$$

(2006 年重庆市数学高考文科试题第 22 题)

视角 3　给定抛物线 $x^2=2py$(其中 $p>0$),根据定理 1,点 P 的横坐标为$\dfrac{x_1+x_2}{2}$,这表明点 A,P,B 的横坐标成等差数列.

视角 4　若再考虑阿基米德三角形$\triangle PAB$ 的底边 AB 的长,则由定理 1 的证明过程可知

$$|AB|=\sqrt{1+\left(\frac{x_1+x_2}{2p}\right)^2}\cdot|x_1-x_2|=$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{x_1+x_2}{2p}\right)^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1xx_2},$$

上式揭示了$\triangle PAB$的底边AB的长$|AB|$、点P的坐标$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_1x_2}{2p}\right)$和抛物线方程中的焦参数$p$三者之间的关系. 若给定点$P$的坐标为$(2,-2p)$时,则由定理1,知$x_1+x_2=4$,$x_1x_2=-4p^2$,假定$|AB|=4\sqrt{10}$,代入上式,可得$p=2$或$p=1$.

从视角3和视角4切入,可编拟:

题2　如图6,设抛物线方程为$x^2=2py$(其中$p>0$),M为直线$y=-2p$上任意一点,过M引抛物线的切线,切点分别为A,B.

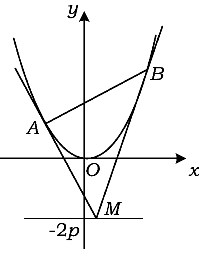

图6

1) 求证:点A,M,B的横坐标成等差数列;

2) 已知当点M的坐标为$(2,-2p)$时,$|AB|=4\sqrt{10}$,求此时抛物线的方程.

(2008年山东省数学高考理科试题第22题)

2.2　轨迹问题

视角5　设阿基米德三角形$\triangle PAB$底边AB的中点为Q,考查AB的中点Q的坐标与顶点P的坐标之间的关系.

设点Q的坐标为(x,y),由于$x=\frac{x_1+x_2}{2}$,$y=\frac{x_1^2+x_2^2}{4p}$,及

$$x_1x_2=\frac{(x_1+x_2)^2-(x_1^2+x_2^2)}{2}=\frac{4x^2-4py}{2}=2x^2-2py,$$

根据定理1知点P的坐标为$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_1x_2}{2p}\right)$,即$P\left(x,\frac{x^2}{p}-y\right)$.

视角6　假定点P在曲线$f(x,y)=0$上运动时,可求得阿基米德三角形$\triangle PAB$底边AB中点Q的轨迹方程为$f\left(x,\frac{x^2}{p}-y\right)=0$,如令$p=2$,$f(x,y)=x^2+4y$,可得点$N$的轨迹方程为$3x^2-4y=0$.

从视角4和视角5切入,可编拟:

题3　如图7,抛物线C_1: $x^2=4y$,C_2: $x^2=-2py$(其中$p>0$),点$P(x_0,y_0)$在抛物线C_2上,过点P作C_1的切线,切点为A,B(当P为原点O时,A,B重合于O). 当$x_0=1-\sqrt{2}$时,切线PA的斜率为$-\frac{1}{2}$.

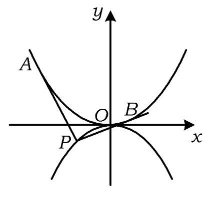

图7

1) 求p的值;

2) 当P在C_2上运动时,求线段AB的中点Q的轨迹方程(当A,B重合于O时,中点为O).

(2013年辽宁省数学高考理科试题第20题)

视角7　设阿基米德三角形$\triangle PAB$的重心为G,考查重心G的坐标(x,y)与点P的坐标之间的关系,易知

$$x=\frac{x_1+x_2+x_P}{3}=x_P,$$

$$y=\frac{y_1+y_2+y_P}{3}=\frac{\frac{x_1^2+x_2^2}{2p}+\frac{x_1x_2}{2p}}{3}=\frac{(x_1+x_2)^2-x_1x_2}{6p}=\frac{2}{3p}x_P^2-\frac{1}{3}y_P,$$

于是　$x_P=x$,　$y_P=\frac{2}{p}x_P^2-3y=\frac{2}{p}x^2-3y.$

视角8　假定点P在曲线$f(x,y)=0$上运动,可求得阿基米德三角形$\triangle PAB$底边AB中点G的轨迹方程为$f\left(x,\frac{2}{p}x^2-3y\right)=0$,如令$p=\frac{1}{2}$,$f(x,y)=x-y-2$,可得点$G$的轨迹方程为

$$x-(4x^2-3y)-2=0,$$

即　$$y=\frac{1}{3}(4x^2-x+2).$$

视角9[2]　考虑抛物线$x^2=2py$的焦点F与阿基米德三角形的两条边PA,PB所张的角$\angle PFA$和$\angle PFB$的关系. 如图8,作抛物线准线的垂线AA',BB',联结$A'P$,$B'P$,PF,AF,BF,则$k_{FA'}=-\frac{p}{x_1}$,$k_{PA}=\frac{x_1}{p}$.

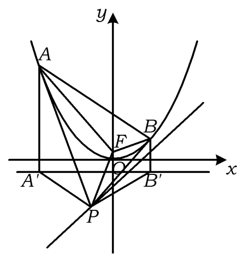

图8

显然$k_{FA'}\cdot k_{PA}=-1$,从而$FA\perp PA$,由抛物线定义,得$|AA'|=|AF|$,故AP是线段$A'F$的中垂线,得

$$|PA'|=|PF|,\quad \angle PA'A=\angle PFA,$$

同理可证　$|PB'|=|PF|$,　$\angle PB'B=\angle PFB$,

从而　$|PA'|=|PB'|=|PF|$,

即　$\angle PA'B'=\angle PB'A'$,

于是　$\angle PA'A=\angle PA'B'+90°=\angle PB'A'+90°=\angle PB'B$,

即　$\angle PFA=\angle PFB$.

从视角 7 ~9 切入,可编拟:

题 4　如图 8,设抛物线 C: $y=x^2$ 的焦点为 F,动点 P 在直线 l: $x-y-2=0$ 上运动,过点 P 作抛物线 C 的两条切线 PA,PB,且与抛物线 C 分别相切于点 A,B.

1) 求△APB 的重心 G 的轨迹方程;

2) 证明: $\angle PFA=\angle PFB$.

(2005 年江西省数学高考理科试题第 22 题)

2.3　切线问题

视角 10[3]　考查阿基米德三角形△PAB 在底边 AB 过 y 轴上定点 $C(0,y_0)$ 的条件下顶点 P 的轨迹.

设 $P(x,y)$,则由定理 1 知

$$x_1+x_2=2x,\quad x_1x_2=2py,$$

将 $C(0,y_0)$ 的坐标代入定理 1 中直线 AB 的方程可得

$$(x_1+x_2)\cdot 0-2py_0-x_1x_2=0,$$

从而 $$x_1x_2=-2py_0,$$

即 $$2py=-2py_0,$$

得到 $y=-y_0$,这就是顶点 P 的轨迹方程,此时点 P 的坐标为 $\left(\frac{x_1+x_2}{2},-y_0\right)$.

根据推论 1,阿基米德三角形底边上的中线平行(重合)于抛物线的对称轴,设 Q 为阿基米德三角形△PAB 底边 AB 的中点,则过点 Q 且垂直于 x 轴的直线与直线 l: $y=-y_0$ 的交点就是阿基米德三角形△PAB 的顶点 P.

视角 11[3]　反之,若垂直于 x 轴的直线与 AB 和直线 l: $y=-y_0$ 分别交于点 Q,M,可证明当 MA 是抛物线的切线时,点 M 就是阿基米德三角形△PAB 的顶点,点 Q 也是△PAB 底边 AB 的中点.

事实上,将抛物线的切线 MA 的方程 $y-\frac{x_1^2}{2p}=\frac{x_1}{p}(x-x_1)$ 与 $y=-y_0$ 联立,可得点 M 的横坐标为

$$x_M=\frac{-2py_0+x_1^2}{2x_1}=\frac{x_1x_2+x_1^2}{2x_1}=\frac{x_1+x_2}{2},$$

再代入切线 MA 的方程,可得

$$y_M=\frac{x_1^2}{2p}+\frac{x_1}{p}\left(\frac{x_1+x_2}{2}-x_1\right)=\frac{x_1x_2}{2p}.$$

这表明 M 就是阿基米德三角形△PAB 的顶点 P,由于 $QM\perp x$ 轴,故点 Q 的横坐标也是 $\frac{x_1+x_2}{2}$,表明点 Q 也是△PAB 底边 AB 的中点.

从视角 10 和视角 11 切入,取 $p=\frac{1}{2}$,可编拟:

题 5　如图 9,在平面直角坐标系 xOy 中,过 y 轴正方向上一点 $C(0,c)$ 任作一直线,与抛物线 $y=x^2$ 相交于点 A,B,一条垂直于 x 轴的直线,分别与线段 AB 和直线 l: $y=-c$ 交于点 Q,P.

1) 若 Q 为线段 AB 的中点,求证: PA 为此抛物线的切线.

2) 试问第 1) 小题的逆命题是否成立? 说明理由.

(2007 年江苏省数学高考试题第 19 题)

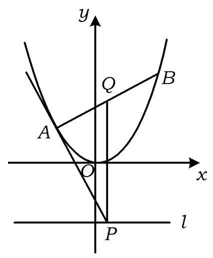

图 9

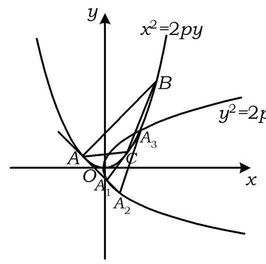

图 10

视角 12[3]　如图 10,考查两条共顶点的抛物线 $y^2=2px$ 与 $x^2=2py$,假定抛物线 $y^2=2px$ 的内接△$A_1A_2A_3$ 的边 A_1A_2,A_2A_3 所在的直线分别与抛物线 $x^2=2py$ 相切于点 A,B,根据射影几何极点极线相关知识(共线点的极线必共点,共点线的极点必共线),可知 A_1,A_3 相应于抛物线 $x^2=2py$ 的两极线(即过点 A,B 的切点弦)必共点,即△$A_1A_2A_3$ 的边 A_1A_3 所在的直线与抛物线 $y^2=2px$ 相切于点 C.

从视角 12 切入,可编拟:

题 6　抛物线 $y^2=2px$ 的内接三角形有两边所在的直线与抛物线 $x^2=2py$ 相切,证明这个三角形的第三边所在的直线也与 $x^2=2py$ 相切.

(1982 年全国数学高考理科试题第 8 题)

2.4　最值问题

视角 13[3]　若阿基米德三角形的底边 AB 过抛物线的焦点 F,将点 F 的坐标 $\left(0,\frac{p}{2}\right)$ 代入定理 1 中直线 AB 的方程,可得

$$(x_1+x_2)\cdot 0-2p\cdot\frac{p}{2}-x_1x_2=0,$$

即 $$x_1x_2=-p^2,$$

由定理 1,得 $P\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_1x_2}{2p}\right)$,从而

$$\overrightarrow{FP}=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_1x_2}{2p}-\frac{p}{2}\right).$$

又 $\overrightarrow{BA}=\left(x_1-x_2,\frac{x_1^2}{2p}-\frac{x_2^2}{2p}\right)$,则

$$\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{x_1^2-x_2^2}{2}+\frac{(x_1^2-x_2^2)(x_1x_2-p^2)}{4p^2}=\frac{(x_1^2-x_2^2)(x_1x_2+p^2)}{4p^2}=0,$$

故 $PF\perp AB$.

视角14　设 Q 为 AB 的中点,根据推论1知 $PQ\perp x$ 轴,于是

$$|PQ|=\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{p}{2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{4p}+\frac{p}{2}\geqslant\frac{2|x_1x_2|}{4p}+\frac{p}{2}=\frac{2p^2}{4p}+\frac{p}{2}=p,$$

从而
$$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}|PQ|\cdot|x_1-x_2|\geqslant|PQ|\cdot\sqrt{|x_1x_2|}\geqslant p^2.$$

从视角13和视角14切入,可编拟:

题7　已知抛物线 $x^2=4y$ 的焦点为 F,A,B 是抛物线上的两个动点,且 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FB}$(其中 $\lambda>0$).过点 A,B 分别作抛物线的切线,设其交点为 M.

1)证明:$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{AB}$ 为定值;

2)设 $\triangle ABM$ 的面积为 S,写出 $S=f(\lambda)$ 的表达式,并求 S 的最小值.

(2006年全国数学高考卷Ⅱ理科试题第21题)

2.5　面积问题

视角15　给定抛物线 $x^2=2py$ 上关于 y 轴对称的点 $A(-2,1)$,$B(2,1)$,可求得其方程为 $x^2=4y$,且抛物线 $x^2=4y$ 在点 A,B 处的切线方程分别为 $y=-x-1$,$y=x-1$,两切线的交点坐标为 $P(0,-1)$,由推论2可知:若抛物线弧 AB 上任一点 Q 处的切线与 PA,PB 都相交,交点分别为 D,E,则 $\triangle QAB$ 与 $\triangle PDE$ 的面积之比是常数2.

从视角15切入,可编拟:

题8　已知点 $O(0,0)$,$A(-2,1)$,$B(2,1)$,曲线 C 上任意一点 $M(x,y)$ 满足 $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|=\overrightarrow{OM}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+2$.

1)求曲线 C 的方程.

2)动点 $Q(x_0,y_0)$(其中 $-2<x_0<2$)在曲线 C 上,曲线 C 在点 Q 处的切线为 l.问:是否存在定点 $P(0,t)$(其中 $t<0$),使得 l 与 PA,PB 都相交,交点分别为 D,E,且 $\triangle QAB$ 与 $\triangle PDE$ 的面积之比是常数?若存在,求 t 的值;若不存在,请说明理由.

(2012年江西省数学高考理科试题第20题)

视角16　若改变开口方向,考查开口向右的抛物线 $y^2=2px$(其中 $p>0$),如图11,在抛物线 $y^2=2px$(其中 $p>0$)的阿基米德三角形 $\triangle ABC$ 中,若给定底边端点的横坐标分别为 s,t,则类比定理1的结论,可知阿基米德三角形 $\triangle ABC$ 的顶点 A 的坐标为 $\left(\frac{2p}{st},\frac{s+t}{2}\right)$,底边 BC 所在的直线方程为 $(s+t)y-2px-st=0$,其斜率 $k_{BC}=\frac{2p}{s+t}$.

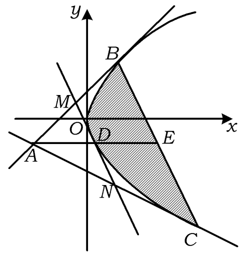

图11

视角17　在抛物线上构造一条平行于 BC 的切线 MN(切点为 D),与 AB,AC 的交点分别是点 M,N,由定理2,知 $\frac{|BM|}{|MA|}=\frac{|MD|}{|DN|}=\frac{|AN|}{|NC|}$.由 $MN/\!/BC$,得 $\frac{|MA|}{|BM|}=\frac{|AN|}{|NC|}$,从而 $\frac{|MA|}{|BM|}=\frac{|AN|}{|NC|}=\frac{|BM|}{|MA|}$,$|MA|=|BM|$,$M$ 为 AB 的中点,即 $|MD|=|DN|$,亦即 D 为 MN 的中点,也是 AE 的中点.据推论2可知抛物线及 BC 所围成的阴影部分的面积 $T=\frac{2}{3}S$.

从视角16和视角17切入,可编拟:

题9　已知点 $R(x_0,y_0)$ 在 Γ:$y^2=2px$ 上,以 R 为切点的 Γ 的切线的斜率为 $\frac{p}{y_0}$,过 Γ 外一点 A(不在 x 轴上)作 Γ 的切线 AB,AC,点 B,C 为切点,作平行于 BC 的切线 MN(切点为 D),点 M,N 分别是与 AB,AC 的交点(如图11).

1)用 B,C 的纵坐标 s,t 表示直线 BC 的斜率;

2)若直线 AD 与 BC 的交点为 E,证明:D 是 AE 的中点;

3)设 $\triangle ABC$ 的面积为 S,若将由过 Γ 外一点的两条切线及第3条切线(平行于两切线切点的连线)围成的三角形叫做"切线三角形",如 $\triangle AMN$,再由 M,N 作"切线三角形",并依这样的方法不断作切线三角形,……试利用"切线三角形"的面积和计算由抛物线及 BC 所围成的阴影部分的面积 T.

(2016年3月上海市八校高三联合测试理科试题第22题)

参考文献

[1] 陶兴模.由抛物线的阿基米德定理引出的几个命题[J].数学通讯,1999(1):28-29.

[2] 邵明志,陈克勤.高考试题中的阿基米德三角形[J].数学通报,2008(9):39-41.

[3] 方亚斌.源于世界数学名题的高考赏析题[M].杭州:浙江大学出版社,2017.