一题多解拓思维　解法优化促发展

江西省九江市第三中学　(332000)　卢恩良

高三数学复习备考过程中,教师如何组织课堂教学更能提高效率?较为理想的做法便是精选例习题,以一题多解的形式开拓学生思维.通过一题多解,既能复习、巩固基础知识和基本数学思想方法,也能在一题多解的过程中提升解题能力,从而全面地发展学生数学核心素养.

1　题目呈现

已知函数$f(x)=e^{x+1}-\frac{2}{x}$,$g(x)=\frac{a+x+\ln x}{x}$,$a\in R$.(1)当$x\in(1,+\infty)$时,求函数$g(x)$的极值;(2)若$a=0$,求证:$f(x)\geqslant g(x)$.

第(1)问是常规的含参函数讨论,此处不详述,下面主要展示第(2)问的课堂教学片断.

2　课堂多解探究

师:对于形如"$f(x)\geqslant g(x)$"的函数不等式证明问题,我们常用的方法是什么?

生:移项,一边化为零,然后构造函数.(异口同声地回答)

师:很不错.看来同学们对这类基本问题的处理方法已经很熟悉了.我们可以把问题转化为证明$e^{x+1}-\frac{2+\ln x}{x}-1\geqslant 0$成立.那么接下来应该干嘛呢?

生1:把不等式左边构造函数,证明这个函数的最小值大于等于零.

师:很棒.下面,我们一起来研究所构造函数的最小值.

视角1　函数最值法+隐零点

解法一:设$h(x)=e^{x+1}-\frac{2+\ln x}{x}-1(x>0)$,求导得$h'(x)=e^{x+1}+\frac{1+\ln x}{x^2}=\frac{x^2e^{x+1}+1+\ln x}{x^2}$.设$t(x)=x^2e^{x+1}+1+\ln x$,易知$t(x)$在$(0,+\infty)$上单增.又因为$t\left(\frac{1}{e^2}\right)<0$,$t\left(\frac{1}{e}\right)>0$,所以必有$x_0\in(e^{-2},e^{-1})$,使得$t(x_0)=0$.当$x\in(0,x_0)$,$t(x)<0$,$h'(x)<0$,$h(x)$单减;当$x\in(x_0,+\infty)$,$t(x)>0$,$h'(x)>0$,$h(x)$单增,所以$h(x)_{\min}=h(x_0)=e^{x_0+1}-\frac{2+\ln x_0}{x_0}-1$.

师:到这里,同学们发现这是什么问题类型了吗?

生:隐零点.(异口同声)

师:很好.那你能把函数的最小值进行代换化简吗?

(经过几分钟观察,并动手尝试后,不少同学纷纷摇头,表示束手无策.)

师:大家仔细观察一下,方程$t(x_0)=x_0{}^2e^{x_0+1}+1+\ln x_0=0$中指、对同时存在,正所谓"指对跨阶想什么?"

生:同构.

师:对.指对跨阶想同构.下面我们从同构的角度进行代换化简.由$x_0{}^2e^{x_0+1}+1+\ln x_0=0$,整理得$x_0e^{x_0}=\frac{1}{ex_0}\ln\frac{1}{ex_0}=\left(\ln\frac{1}{ex_0}\right)e^{\ln\frac{1}{ex_0}}$.因为函数$y=xe^x$在区间$(0,+\infty)$单调递增,且$\ln\frac{1}{ex_0}>0$,所以$x_0=\ln\frac{1}{ex_0}$,$x_0+\ln x_0=-1$,$e^{x_0+1}=\frac{1}{x_0}$.$h(x)_{\min}=e^{x_0+1}-\frac{2+\ln x_0}{x_0}-1=\frac{1}{x_0}-\frac{1-x_0}{x_0}-1=0$.所以$h(x)\geqslant 0$成立,即$e^{x+1}-\frac{2+\ln x}{x}-1\geqslant 0$成立,原问题$f(x)\geqslant g(x)$得证.

师:同学们,同构化简思维要求高,技巧性强,对大家有一定的挑战.我们需要思考的问题是"为什么所构造的函数求导后这么复杂?"、"是否可以构造其他函数进行证明呢?".

生2:求导复杂是由对数部分引起的,可以把对数前的变量x消掉,这样求导就可能会简单些.

师:很好.想法与我们平时的学习总结不谋而合,其实就是我们所说的"对数单身狗".下面,我们再次将问题转化,将解法一进行优化.

视角2　"对数单身狗"+隐零点

解法二:要证$e^{x+1}-\frac{2+\ln x}{x}-1\geqslant 0$,等价于证明$xe^{x+1}-2-x-\ln x\geqslant 0$.设$h(x)=xe^{x+1}-2-x-\ln x$,求导得$h'(x)=(x+1)\left(e^{x+1}-\frac{1}{x}\right)$.易知函数$y=e^{x+1}-\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$单调递增,且$y(e^{-2})=e^{e^{-2}+1}-$

$e^2<0$, $y(e^{-1})=e^{e^{-1}+1}-e>0$, 所以必有 $x_0\in(e^{-2},e^{-1})$, 使得 $y(x_0)=0$. 当 $x\in(0,x_0)$, $h'(x)<0$, $h(x)$ 单减; 当 $x\in(x_0,+\infty)$, $h'(x)>0$, $h(x)$ 单增, 所以 $h(x)_{\min}=h(x_0)=x_0e^{x_0+1}-2-x_0-\ln x_0$. 又因为 $y(x_0)=0$, 即 $e^{x_0+1}=\frac{1}{x_0}$, 整理得 $x_0e^{x_0+1}=1$, $x_0+1=-\ln x_0$. 代入, 有 $h(x)_{\min}=h(x_0)=1-2-(-1)=0$. 所以 $h(x)\geqslant0$ 成立, 即 $e^{x+1}-\frac{2+\ln x}{x}-1\geqslant0$ 成立, 原问题 $f(x)\geqslant g(x)$ 得证.

师: 将解法一优化后发现, 虽然问题仍然是隐零点, 但是代换化简非常简单, 化简结果与解法一中的同构化简是完全一致的. 观察式子 $xe^{x+1}-2-x-\ln x\geqslant0$ 的结构, 同学们还有其他想法吗?

生 3: 可以将 xe^{x+1} 中的 x 放上去, 化为 $e^{x+1+\ln x}$.

师: 很好. 其实这与 2022 年高考全国甲卷导数压轴题极其类似. 对于 xe^x 和 $\frac{e^x}{x}$ 结构, 都可以指对互换, 把 e^x 前的量放上去. 因此, 我们可以把 $xe^{x+1}-2-x-\ln x\geqslant0$ 的证明转化为证明 $e^{x+\ln x+1}\geqslant x+\ln x+2$.

视角 3　同构代换 + 切线放缩

解法三: 由解法二要证 $xe^{x+1}-2-x-\ln x\geqslant0$, 等价于证明 $e^{x+\ln x+1}\geqslant x+\ln x+1+1$. 令 $t=x+\ln x+1$, 问题等价于证明 $e^t\geqslant t+1$, 显然成立(此处证明略, 学生考场上需要严格证明).

师: 通过换元, 问题即化为常见的不等式证明, 是我们熟知的切线不等式. 通过对本题进行多角度的解答, 同学们要学会分析问题, 结合已有的数学解题经验, 合理地转化.

3　课后巩固训练

题目　(九江市 2022 年模拟题) 若关于 x 的不等式 $ax+\ln x+1\leqslant xe^x(a\in R)$, 求 a 的取值范围.

解: 原不等式化为 $a\leqslant\frac{xe^x-\ln x-1}{x}$, 问题转化为求函数 $\frac{xe^x-\ln x-1}{x}$ 的最小值.

(方法一) 设 $h(x)=\frac{xe^x-\ln x-1}{x}$, 求导得 $h'(x)=\frac{x^2e^x+\ln x}{x^2}$. 令 $g(x)=x^2e^x+\ln x$, 易得 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单增, 且当 $x\to0^+$ 时, $g(x)\to-\infty$, $g(1)=e>0$, 所以必有唯一的 $x_0\in(0,1)$, 使 $g(x_0)=0$. 当 $x\in(0,x_0)$ 时, $g(x)<0$, $h'(x)<0$, $h(x)$ 单减, 当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时, $g(x)>0$, $h'(x)>0$, $h(x)$ 单增, 所以 $h(x)_{\min}=h(x_0)=\frac{x_0e^{x_0}-\ln x_0-1}{x_0}$. 因为 $g(x_0)=0$, 所以 $x_0e^{x_0}=\frac{1}{x_0}\ln\frac{1}{x_0}=\ln\frac{1}{x_0}\cdot e^{\ln\frac{1}{x_0}}$. 由 $y=xe^x$ 在 $(0,+\infty)$ 单增, 得 $x_0=\ln\frac{1}{x_0}$, $x_0+\ln x_0=0$, 即 $x_0e^{x_0}=1$, 所以 $h(x)_{\min}=\frac{x_0e^{x_0}-\ln x_0-1}{x_0}=\frac{-\ln x_0}{x_0}=1$, $a\leqslant1$.

(方法二) 对于求解 $\frac{xe^x-\ln x-1}{x}$ 的最小值, 考虑指对互换, 有 $\frac{e^{x+\ln x}-\ln x-1}{x}$. 根据经典切线不等式 $e^x\geqslant x+1$ 及不等式中的同构代换思想, 有 $\frac{e^{x+\ln x}-\ln x-1}{x}\geqslant\frac{x+\ln x+1-\ln x-1}{x}=1$ (当且仅当 $x+\ln x=0$ 时, 等号成立).

4　教学思考

(1) 注重一题多解, 发展数学思维

高三复习课中教师要精选题目, 通过一题多解的研究, 可以很好地挖掘各部分数学知识和方法间的联系, 全面构建和发展学生的数学思维, 从而让学生解题能力的提高发展为数学核心素养的提升. 文中试题的证明并没有上来就讲解解法三, 而是基于学生已有的数学活动经验, 逐步引导学生, 在解决的过程中合理优化, 精准施策, 从而培养学生的数学思维, 让学生学会用数学的眼光观察世界, 用数学的思维分析世界, 用数学的语言描述世界.

(2) 尊重学生认知规律, 构建数学生态课堂

高三复习课要以学生为主体, 尊重学生认知发展规律, 避免满堂灌的教学. 特级教师文卫星老师提倡的数学生态课堂, 就是要尊重数学知识的发生、发展过程, 尊重学生的认知规律. 文中三种不同方法的得出是循序渐进的, 遵循由难到易, 由繁杂到简单, 这是学生在已有数学活动经验基础上, 通过教师的引导, 逐步优化得出的.