运用数学化破解高考情境类试题的实践与思考

卓 斌

（南京师范大学附属中学秦淮科技高中 210007）

新课程改革背景下的高考数学试题创新之处就是设置了"情境类"试题，在考查载体上推陈出新.实践表明，这种通过再现学科理论产生的场景或是呈现现实生活中新颖的情境，让学生在真实的情境中进行"问题解决"，的确能够让学生调动必备知识、运用关键能力、展现学科素养、发挥核心价值，体现高考"立德树人，服务选才，引导教学"的核心功能.但是，面对高考"情境类"试题，考生普遍存在心理上不适应，认知上有障碍，导致得分率偏低，同时，教师也感到无从下手，力不从心.那么，如何破解"情境类"试题的困境，成为当下高三师生必须面对的热点问题.我们尝试从数学化的角度对这个问题进行探索，以求教于大家.

1 对于"情境类"试题的认识

"情境"是指真实的问题背景，是以问题或任务为中心构成的活动场域.数学问题产生于数学情境，数学情境是从事数学活动的环境，是产生数学行为的条件.人们通过对数学情境中数学信息的观察、分析，产生疑虑、困惑，逐步发现、形成数学问题，最后通过解决问题生成数学知识，获得创造性数学成果.《普通高中数学课程标准(2017年版)》在"实施建议"中明确指出，"设计合适的教学情境、提出合适的数学问题是有挑战性的，也为教师的实践创新提供了平台.教师应不断学习、探索、研究、实践，提升自身的数学素养，了解数学知识之间、数学与生活、数学与其他学科的联系，开发出符合学生认知规律、有助于提升学生数学学科核心素养的优秀案例"[1].

高考试题情境通常分为课程学习情境、探索创新情境和生活实践情境三类[2].其中，课程学习情境试题主要体现对于数学学科基础知识的考查，注重在数学概念、原理、运算、推理等方面设置情境.探索创新情境试题主要考查学生的创新意识，需要经历数学知识的推演、探究过程，运用新思维和新方法.生活实践情境试题主要是指在数学试题中构建一种与社会生活相关联的场景，以体现数学学科的广泛应用性.我们认为，高考试题以课程学习、探索创新和生活实践情境问题为载体，有利于引领教育教学回归人类知识生产过程的本源，还原知识应用的实际过程，符合人类知识再生产的普遍规律，也有利于考查学生学以致用、改造世界的实践能力.

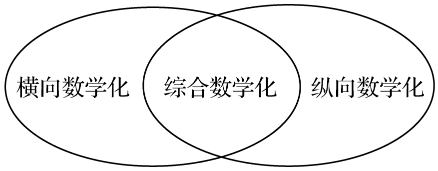
2 对于"数学化"的理解

应该如何指导学生应对情境类试题呢？我们想到了"数学化".荷兰著名数学家弗赖登塔尔认为，人们在观察、认识和改造客观世界的过程中，运用数学的思想和方法来分析和研究客观世界的种种现象并加以整理和组织的过程，就叫数学化."数学化"既包括将一个现实问题转化为数学问题或已知的数学模型，即横向数学化，也包括数学系统内部的数学化，即以已有的数学知识为基础进行再抽象、综合演绎，从而构造整个数学大厦，即纵向数学化.他的名言就是：与其说是学习数学，还不如说是学习"数学化".

无独有偶，前苏联著名数学教育家斯托利亚尔认为，"数学教学应该是数学活动的教学"，一个完整的数学活动可以分为三个阶段："第一，经验材料的数学组织化；第二，数学材料的逻辑组织化；第三，数学理论的应用."我们认为，"经验材料的数学组织化"就是从"问题情境"到建立"数学模型"的过程；"数学材料的逻辑组织化"就是"数学模型"的建构与优化的过程；"数学理论的应用"则是从"数学模型"走向新的"问题情境"的过程.其中，"数学组织化"与"逻辑组织化"，在一定意义上说，就是"数学化".

基于以上分析，我们把数学化划分为三类水平：一是通过建立"数学模型"解决生活实践问题的过程，称之为"横向数学化"；二是按照系统化的

思维方式建构数学知识体系的过程,称之为“纵向数学化”;三是运用建立的“数学模型”解决探索创新问题的过程,称之为“综合数学化”. 三类数学化关系如图所示,横向数学化是建构数学知识体系的基础与前提,纵向数学化是建构数学知识体系的关键与核心,综合数学化既包含横向数学化,又包含纵向数学化,是二者的交集,指向数学知识体系的创新应用. 数学化应该成为破解高考情境类试题的重要抓手. 下面举例说明如何运用数学化破解三类情境类试题.



数学化三类水平

3　例谈运用数学化破解情境类问题

3.1　运用横向数学化破解生活实践情境问题

在社会不断发展、科技日新月异的背景下,命题人经常选取工业生产、产品制造、科技前沿等实际存在的现实问题,命制生活实践情境试题. 解决这类问题需要培养学生横向数学化水平.

例 1(2020 年山东卷选择题第 6 题)基本再生数 R_0 与世代间隔 T 是新冠肺炎的流行病学基本参数. 基本再生数指一个感染者传染的平均人数,世代间隔指相邻两代间传染所需的平均时间. 在新冠肺炎疫情初始阶段,可以用指数模型:$I(t)=e^{rt}$ 描述累计感染病例数 $I(t)$ 随时间 t(单位:天)的变化规律,指数增长率 r 与 R_0,T 近似满足 $R_0=1+rT$. 有学者基于已有数据估计出 $R_0=3.28$,$T=6$. 据此,在新冠肺炎疫情初始阶段,累计感染病例数增加 1 倍需要的时间约为(　　)($\ln2\approx0.69$).

A. 1.2 天　　B. 1.8 天

C. 2.5 天　　D. 3.5 天

评析:根据题意可得 $r=\dfrac{3.28-1}{6}=0.38$,所以 $I(t)=e^{rt}=e^{0.38t}$. 设累计感染病例数增加 1 倍需要 t_1 天,则 $e^{0.38(t+t_1)}=2e^{0.38t}$,所以 $e^{0.38t_1}=2$,$t_1=\dfrac{\ln2}{0.38}\approx\dfrac{0.69}{0.38}\approx1.8$ 天,故选 B. 本题主要考查指数型函数模型的应用,以及指数式转化为对数式等数学知识. 这是一道与时俱进具有鲜活生活实践情境的应用型试题,渗透了数学建模与数学运算等核心素养,充分体现了数学的广泛应用性.

3.2　运用纵向数学化破解课程学习情境问题

对于高考试卷中课程学习情境问题,学生普遍感到困难的是“综合性”的试题,需要运用纵向数学化进行解决,譬如下面这道高考题.

例 2(2020 年山东卷多项选择题第 9 题)已知曲线 $C:mx^2+ny^2=1$,(　　).

A. 若 $m>n>0$,则 C 是椭圆,其焦点在 y 轴上

B. 若 $m=n>0$,则 C 是圆,其半径为 $\sqrt{n}$

C. 若 $mn<0$,则 C 是双曲线,其渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{-\dfrac{m}{n}}x$

D. 若 $m=0$,$n>0$,则 C 是两条直线

评析:本题以曲线的一般方程 $C:mx^2+ny^2=1$ 为载体,考查不同曲线的性质与特征. 考生需要通过对参数 m,n 的分类讨论,逐项求解四类曲线的几何属性,侧重考查数学运算的核心素养,不难得到答案是 ACD. 本题以一道多选题形式,从曲线方程研究几何性质的视角,串联起“圆锥曲线”一章内容,实现了数学知识体系内部的贯通,是纵向数学化命题的良好示范.

那么,如何提高解答纵向数学化试题能力呢? 我们认为应该从每个模块基本点出发,形成各模块可能的知识交汇点,从而站在这一模块的制高点上,做到俯瞰全局,把握问题的源与流. 譬如,在“数列”一章复习后,南师附中数学组编制了如下试题.

例 3　设公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ ($n\in\mathbf{N}^*$)的前 n 项和为 S_n,公比不为 1 的等比数列 $\{b_n\}$ ($n\in\mathbf{N}^*$)的前 n 项和为 T_n. 则下列说法正确的有(　　).

A. 对于任意正整数 m,n,p,q,当 $m+n=p+q$ 时,一定有 $a_m+a_n=a_p+a_q$,$b_m\cdot b_n=b_p\cdot b_q$

B. 存在常数 A,B,使 $T_n-A=Bb_n$

C. 存在常数 A,B,C,使 $S_n=Aa_n^2+Ba_n+C$

D. 至少存在四个正整数 n,使 $S_n=b_n$

评析:本题主要考查等差(等比)数列的通项 a_n 以及前 n 项和 S_n 的相关性质,并探索相关方程解的个数问题,不难得到答案是 ABC. 这是一道跨越“数列”一章的综合题,以方程有解问题为

载体，探索二次函数、指数函数的有关性质，考查学生逻辑推理和数学运算的核心素养.

3.3　运用综合数学化破解探索创新情境问题

高考试卷的选拔性主要体现在探索创新情境试题，这类试题具有开放性、探究性和创新性的特征. 解决这类试题需要综合数学化.

例 4（2020 年山东卷多项选择题第 12 题）信息熵是信息论中的一个重要概念. 设随机变量 X 所有可能的取值为 $1,2,\cdots,n$，且 $P(X=i)=p_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，$\sum_{i=1}^{n}p_i=1$，定义 X 的信息熵 $H(X)=-\sum_{i=1}^{n}p_i\log_2 p_i$.（　　）.

A. 若 $n=1$，则 $H(X)=0$

B. 若 $n=2$，则 $H(X)$ 随着 p_1 的增大而增大

C. 若 $p_i=\frac{1}{n}(i=1,2,\cdots,n)$，则 $H(X)$ 随着 n 的增大而增大

D. 若 $n=2m$，随机变量 Y 所有可能的取值为 $1,2,\cdots,m$，且 $P(Y=j)=p_j+p_{2m+1-j}(j=1,2,\cdots,m)$，则 $H(X)\leqslant H(Y)$

评析：本题答案是 AC. 对于新定义“信息熵”的理解和运用，体现了横向数学化，涉及对数运算、对数函数以及不等式基本性质的运用，渗透了纵向数学化. 这道题属于探索创新情境的典型范例，需要横向数学化转化为数学问题，又需要纵向数学化进行数学知识的推演、探究过程，渗透新思维、新方法.

那么，如何提高学生综合数学化水平呢？我们认为不仅需要提高学生数学阅读水平、拓展知识面，还需要培养学生数学知识迁移与创新的能力，实现跨学科、跨领域规划解题路线图的本领. 譬如，下面这道题跨越多个数学领域.

例 5　已知正数 x,y 满足 $\frac{8}{x}+\frac{1}{y}=1$，则 $\sqrt{x^2+y^2}$ 的最小值为________.

思路一：当作“不等式”问题.

由柯西不等式得

$$(x^2+y^2)(2^2+1^2)\geqslant(2x+y)^2,$$

即 $\sqrt{x^2+y^2}\geqslant\frac{2x+y}{\sqrt{5}}$，又因为

$$2x+y=(2x+y)\left(\frac{8}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

$$=17+\frac{8y}{x}+\frac{2x}{y}\geqslant17+2\sqrt{16}=25,$$

上述两个不等式当且仅当 $x=2y$ 取等号.

所以 $\sqrt{x^2+y^2}\geqslant\frac{2x+y}{\sqrt{5}}\geqslant5\sqrt{5}$，

当且仅当 $\begin{cases}x=10,\\y=5.\end{cases}$ 时等号成立.

思路二：当作“函数”问题.

设 $\frac{8}{x}=\cos^2\alpha$，$\frac{1}{y}=\sin^2\alpha$，则

$$x=\frac{8}{\cos^2\alpha}=\frac{16}{1+\cos2\alpha},$$

$$y=\frac{1}{\sin^2\alpha}=\frac{2}{1-\cos2\alpha},$$

因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，令 $t=\cos2\alpha$，则 $t\in(-1,1)$.

又设 $f(t)=\left(\frac{16}{1+t}\right)^2+\left(\frac{2}{1-t}\right)^2$，

则 $f'(t)=8\frac{(5t-3)(13t^2-30t+21)}{(1-t^2)^3}$，

由 $f'(t)=0$ 得 $t=\frac{3}{5}$，所以函数 $f(t)$ 在 $\left(-1,\frac{3}{5}\right)$ 单调递减，在 $\left(\frac{3}{5},1\right)$ 单调递增，

故 $f(t)_{\min}=f\left(\frac{3}{5}\right)=125$，

即 $\sqrt{x^2+y^2}$ 的最小值为 $5\sqrt{5}$.

思路三：当作“解析几何”问题.

由 $\sqrt{x^2+y^2}$ 的几何意义，联想到曲线 $y=\frac{x}{x-8}(x>8)$ 上的动点 $P(x,y)$ 到原点 O 的距离.

设 $f(x)=\frac{x}{x-8}$，则 $f'(x)=-\frac{8}{(x-8)^2}$.

又因为 $k_{OP}=\frac{\frac{x}{x-8}-0}{x-0}=\frac{1}{x-8}$，

所以 $-\frac{8}{(x-8)^2}\cdot\frac{1}{x-8}=-1$，解得 $x=10$.

此时点 $P(10,5)$，$OP=5\sqrt{5}$，

所以 $\sqrt{x^2+y^2}$ 的最小值为 $5\sqrt{5}$.

4　数学化破解“情境类”试题的教学建议

4.1　用好教材中的背景材料，帮助学生丰富“数学现实”

通过访谈，我们发现学生在 （下转第 56 页）

评和指正.

参考文献

[1]沈吉儿,郑瑄.新定义重在理解,新研究彰显能力——宁波、北京十年中考数学新定义试题的赏析与省思[J].数学通报,2022,61(10):44-50

[2]中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准(2022年版)[M].北京:北京师范大学出版社,2022:92

[3]杨裕前,董林伟.义务教育教科书数学(九年级下册)[M].南京:江苏凤凰科学技术出版社,2014:60

[4]金敏,刘春书.从评价的视角思考初中几何变换的教学——以2016年南京市中考数学第20题为例[J].中学数学杂志,2017(4):59-62

[5]曹培英."图形与变换"的备课与教学[J].人民教育,2006(Z2):59-66

[6]赵生初,许正川,卢秀敏.图形的旋转在解题实践中的探索与思考[J].数学通报,2012,51(7):33-38

[7]雅格洛姆.几何变换[M].哈尔滨:哈尔滨工业出版社,2014:3

[8]章建跃."图形的变化"课程教材设计与教学[J].数学通报,2023,62(2):1-8

(上接第42页)

解决生活实践情境与探索创新情境类试题时,遇到的最大困难就是对于一些生产生活常识、行业术语、跨学科知识等,感到非常陌生,不太容易理解题意.譬如,苏教版普通高中教科书数学必修第一册练习题.

例6　销售某种商品,单价为 a 元,销售量是 b.经市场调研可以预测,若单价上涨 $m\%$,则销售量将减少 $\frac{m}{150}$.为了使该商品的销售金额最大,m 应定为多少?

评析:本题涉及销售领域行业术语较多,一方面有些学生读不懂题意;另一方面对于"销售量将减少 $\frac{m}{150}$"在理解上产生歧义,错误地认为涨价后销售量为 $b-\frac{m}{150}$.正确解答,设销售金额为 y,则 $y=a(1+m\%)\cdot b\left(1-\frac{m}{150}\right)$,余下略.

因此,建议在进行各章节新授课学习时,要多联系现实生活,用好教材中提供的背景材料,夯实学生的"数学现实".同时,在各章学习后,可以进行应用题专题训练,让学生体会学以致用之妙,不断积累数学活动经验.

4.2　用好思维导图模型,引领学生整理好数学"工具箱"

首先,指导学生绘制好一章知识体系的"数学知识树"或"思维导图".波利亚认为:"货源充足和组织良好的知识仓库是一个解题者的重要资本.良好的组织使得所提供的知识易于用上,这甚至可能比知识的广泛更为重要."其次,引领学生整理好数学"工具箱",熟知解决每一类数学问题常用的"数学工具",精通每个数学工具的功能,掌握每个数学工具使用的注意事项.譬如,运用基本不等式求解最值问题,就是按照"一正、二定、三相等"的程序解题,当具备条件时,就直接使用;当不具备条件时,就要通过"配凑""转换"等方式,创造条件解决问题.

4.3　设计好数学问题串,培养学生简单问题深度思考

郑毓信先生指出,在学生已经获得了一定的阶段性成果,如他们所面临的问题已经获得了解决,或是对新引进的概念已经有了一定了解,或是已经初步地掌握某种具体的计算方法.我们希望通过适当的提问引导学生更深入地去思考,从而不断取得新的进步,包括最终养成自我提问与自我促进的良好习惯.譬如,尽管学生已经较好地掌握了某一概念,包括能对相关的实例做出正确的判断,也能正确地复述相关的定义,我们仍应促使他们更深入地去思考这一概念与其他各个相关概念之间的联系,包括这一概念的本质是什么,我们为什么要引入这一概念,等等[3].

如何解决"情境类"试题事关新课程改革中"学业质量评价"问题.我们认为,只要不断地丰富学生的"数学现实",打磨好学生的数学"工具箱",培养好学生"深度思维"习惯,一言以蔽之,培养好"数学化"本领,就有可能攻坚克难,乃至攻城拔寨!

参考文献

[1]中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版)[M].北京:人民教育出版社,2020:82

[2]中国高考报告学术委员会.高考试题分析(2023)[M].北京:现代教育出版社,2022,11

[3]郑毓信.以"深度教学"落实数学核心素养[J].小学数学教师,2017(9):4-10