

# 以『幂函数』单元为例 数学单元教学 结构化观念下的



苗 静 华东师范大学附属东昌中学

## 一、研究背景

随着新课程标准的颁布和实施,普通高中教育已经进入新一轮的课程改革,整体思想、系统思维、大概念、单元设计、教学主线等已成为当下最鲜明、最重要的关键词。新课程标准明确指出,教师要“整体把握教学内容,促进数学学科核心素养连续性和阶段性发展”。因此,如何解决知识碎片化,真正实现数学思维品质的培养,落实核心素养的发展,是新时代每个教师亟待思考的问题。

## 二、概念界定与理论模型

### (一)概念界定

1. 单元教学:以数学知识的逻辑关系和相互联系为基本依据,结合学生的认知基础和思维规律,将学习内容组织成单元模块,从整体上把握教学要求,根据数学研究问题的“基本套路”循序渐进地安排教学内容,再分课时践行教学理念。

2. 结构化教学:以“联系—整体—演绎”的结构化理论为导向,从数学“知识体系结构化”的特点和“学生认知结构化”发展规律出发,帮助学生在已有认知结构的基础上,延长知识链,拓宽知识面,从整体上学习数学知识、方法和观念,进而有效地克服数学难点的教学模式。

### (二)理论模型

结构化观念下的单元教学,分别以数学知识结构、学生认知结构作为学习和教学的逻辑起点,运用“联系—整体—演绎”观点,对教学内容、教学目标和教学过程等教学基本要素进行分析,以建立结构化分析、结构化设计和结构化评价整体教学设计方案的过程。它的一般流程可以用图1表示:

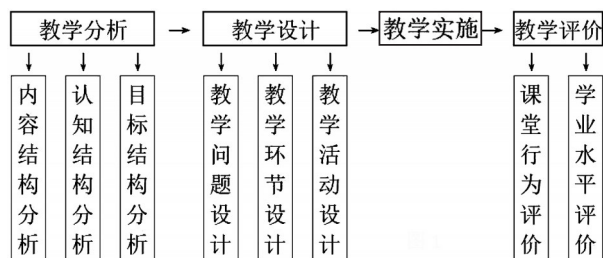


图1

“幂函数”是人教A版新教材第三章第三节中的内容,是继函数的基本性质后研究的第一个函数,也是高中阶段遇到的第一个具体的函数。本文将第三章“函数的概念与性质”视为一个大单元,其下划分若干小单元,以“幂函数”小单元为例,阐述如何在结构化观念下进行单元教学的分析、设计和评价。

### 三、结构化教学分析

#### (一) 内容结构分析

学科学习的实质就是理解学科的基本结构,即理解各种基本概念、原理以及它们相互之间的规律和联系,数学知识结构反映了数学的本质内涵。

##### 1. 学科内容逻辑体系

数学学科的逻辑体系,可以用金字塔的图示加以体现,其中学科大概念是金字塔的顶层,它统摄整个结构体系,其下依次为核心概念、重要概念、基本概念、基本事实。如果将“幂函数”置于整个“函数”单元,对应的概念可以用图2呈现。

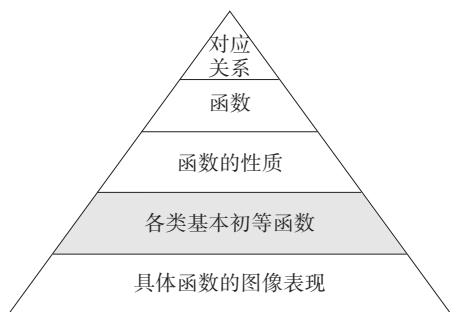


图2

##### 2. 小单元知识逻辑结构

结构化强调知识之间的联系,在课堂教学中除了显性的知识,学生还需要学习隐性的知识,显性知识指的是一个个的知识点,而隐性知识还包括知识点之间的联系、知识点之间的逻辑顺序、知识点习得所需要的思想与方法。显性知识指向知识与技能,隐性知识指向思维、方法、过程,是更具意义的学习。

“幂函数”单元的知识结构可以用图3呈现:

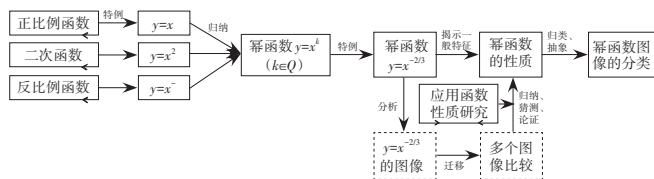


图3

##### 3. 单元知识主线设计

大单元下的数学知识在内容上虽然各不相同,但在大概念的思想统摄下,同类对象的研究存在着高度的“相似性”,因此在把握教学内容的结构基础上,需要对学生思路和学习过程不断重现,让学生感悟、体验各类数学对象的研究方法,而这条研究的路径就是知识的逻辑主线。

在“幂函数”单元中,依据知识的发展过程,可以采

用“定义—特例—性质—图像”作为知识主线,这也可以作为其他类别函数的研究路径,但也可能会根据知识的逻辑有略微的差别,比如由于学生对指数函数没有认知基础,它的主线可以是“定义—特例—图像—性质”。

#### (二) 认知结构分析

认知结构是学生头脑里的知识结构,是学生在过程中观念的内容与组织。学生的认知发展可以形容为在原有认知结构上搭建新的认知结构,并通过各种教学活动使新知识之间、新旧知识之间的联系更为紧密,达到完善巩固认知结构的目的。结构化教学的观点就是用学生认知结构建立教学逻辑起点,因此分析认识结构可以把握教学的重点和难点。

##### 1. 认知起点分析

为了形成新的认知结构,就需要分析知识的起点、技能的起点和思维的起点。

在学习“幂函数”之前,学生在知识上有函数学习经历,但核心概念理解受限。技能上,有列表描点作图的经验,但缺乏严谨性。思维上虽有从特殊到一般的过程,但“数学抽象”是无意识的。在高中阶段,学生对函数概念的认识有了进一步的深化,又学习了函数的各种性质,认知的起点有了进一步的提高,这将为具体函数的研究提供更科学理性的思路。

##### 2. 经验障碍分析

学生在学习过程中会由于知识间联系的问题导致认知障碍,如陌生的知识、复杂的知识、易错的知识。所以教师在教学中要根据学生的这些情况确定教学的难点。

“幂函数”单元中,利用性质研究具体“幂函数”的图像只是认知结构搭建的一个方面,通过多个“幂函数”图像特征归纳总结“幂函数”的性质才是发展认知结构的核心。在研究过程中对“幂函数”图像特征的分类、数学抽象思维的发展以及理性猜测、逻辑论证是学生未曾有过的学习经验,在此过程中学生可能会遇到困难,因此这是本单元的教学难点。

#### (三) 目标结构分析

目标结构从宏观至微观大致可分为“课程(主线)目标—大单元目标—小单元目标”。其中,课程目标是宏观目标,是学生通过学习在学科核心素养方面的变化;大单元目标是中观目标,是大单元学习后学生应达到的知识、能力、方法、思维等素养水平;小单元目标是微观目标,专注于具体内容的学习,关注课堂目标的达成,可

通过检测进行教学评价。三种目标自上而下形成目标结构体系。

在新课标中关于函数的课程目标是“重点提升数学抽象、数学建模、数学运算、直观想象和逻辑推理”等核心素养。函数大单元目标是“用函数图像和代数运算的方法研究具体函数的性质,理解这些函数中所蕴含的运算规律,运用这些函数建立模型,解决简单的实际问题”。基于此,将上述目标加以分解,可以获得如下的“幂函数”小单元目标:

1. 能从自变量、函数值及函数解析式等角度归纳共性,抽象幂函数的一般形式;
2. 能利用函数的基本性质,画出具体幂函数的大致图像;
3. 能通过对多个幂函数图像的观察、猜测、归纳,一般幂函数的图像特征,并发现、论证幂函数的性质;
4. 能利用函数的性质解决比较两个数的大小的代数问题;
5. 结合对幂函数的研究,体会函数概念、基本性质对函数研究的价值,体验函数研究的基本规律,感受从特殊到一般的数学思维方法,提升数学抽象、直观想象、逻辑推理等思维能力。

#### 四、结构化教学设计

知识与认知的结构化分析都是为教学服务的,在教学中应达到知识序与认知序的统一,以此设计教学问题,设置教学环节,组织教学活动。

##### (一) 教学问题设计

一个好问题能使学生在教学关键点、重点、难点处思考和探究,以达到理解知识、体会思想方法和提升数学核心素养的目的,教学往往就是在这种核心问题的解决中展开的。核心问题不是单纯的数学问题,而是指向核心素养的本源性问题,包含学生经验活动的总结、数学思想方法的回顾、学习体验后的感悟。

在“幂函数”单元,基于教学重难点,可以将“如何研究一类新的函数”作为核心问题。

##### (二) 教学环节设计

为了使学生深入体验“数学的方式”,感悟数学研究的脉络,教师需要构建基于课型分类研究的结构化教学主线。

“幂函数”单元作为一类数学对象,属于新授课的范畴,我们根据设置的核心问题,设计四个“教学环节”(见表1,附文后)。

##### (三) 教学活动设计

在设计教学活动时,教师需要考虑教学目标的对接与核心素养的落实。从学生的认知起点和认知障碍出发,幂函数课堂教学可设置如下活动:

在上述教学进程中,明线是“幂函数的概念 $\xrightarrow{\text{研究}}$ 具体幂函数的性质 $\xrightarrow{\text{刻画}}$ 具体幂函数的图像 $\xrightarrow{\text{归纳}}$ 具体幂函数的图像特征 $\xrightarrow{\text{提炼}}$ 一般幂函数的图像与性质”。暗线则是“事实—方法—方法论—数学本质观”,也就是本单元的核心问题——如何研究一类函数。

#### 五、结构化教学评价

教学评价要关注学生数学知识技能的掌握,还要关注学生的学习态度、方法和习惯,更要关注数学学科核心素养水平的达成。教师要从评价中反思教学过程,总结经验,发现问题,提出改进思路。

1. 课堂行为评价包括:(1)从知识讲解应用小结,考查教师教学特征的课堂行为评价;(2)从学习认知表达生成,考查学生的学习特征的学习行为评价,可设置行为评价量表(部分量表见表2,附文后)。

2. 学习水平评价包括:(1)用概念图或思维导图测试学生的认知结构评价;(2)与小单元目标对应的诊断测试的单元学业质量的评价。比如,笔者根据预设的教学目标,设置了三个课堂诊断问题:

①已知幂函数 $y=f(x)$ 图像过点 $(3, \sqrt{3})$ ,求这个函数的解析式——检测幂函数一般形式的理解。

②比较 $(-1.5)^{\frac{3}{5}}$ 与 $(-1.4)^{\frac{3}{5}}$ 的大小关系——检测函数单调性的应用。

③画出 $y=\frac{1}{(x-2)^2}$ 的图像,判断并证明该函数的单调性——检测幂函数的图像的作法、单调性的证明。

结构化教学的最终目的是指向核心素养的思维结构化,因为“四基”“四能”只有通过“思维过程的教学”才能得到落实。这就需要教师理解数学、理解学生、理解教学。对知识结构的分析就是理解数学,对认知结构的分析就是理解学生,结构化教学设计追求学科知识序与学生认知序的统一,将实际的教学活动统一于理想的教学目标之下,保证教学活动的科学性和实效性,这就是理解教学。因此,在新一轮课程改革中,结构化单元教学是贴合新课程、新教材理念的产物,是具有指导性意义的举措,只有不断实践、反思、完善,才能推动新课程改革在课堂教学中落地。

表1 教学环节与教学活动

教学环节与问题解决		教学活动
环节1:概念引入 如何抽象概括幂函数的定义	(1) 情境问题	情境:初中已经学过哪些函数? 问题1:观察 $y=x$ 、 $y=\frac{1}{x}$ 、 $y=x^2$ ,将它们的解析式写成统一的形式,观察它们的共性。
	(2) 抽象概括	问题2:根据上述具体函数的共性特征,抽象概括幂函数的定义。 问题3:根据一般函数的定义,指出幂函数的对应关系。
	(3) 要素理解	例1:已知幂函数 $y=f(x)$ 图像过点 $(2, \frac{1}{\sqrt[3]{4}})$ ,求这个函数的解析式,并求它的定义域。
环节2:概念分析 如何画出幂函数的大致图像	(1) 方法分析	对陌生函数直接研究比较困难,需要从特殊到一般,但问题1中的三个图像已呈现多样性和复杂性。如果用列表描点法研究,会产生很多问题,比如点怎么取?取正还是取负?为了保证数学的严谨性,可以先借助函数的性质,从代数的理性角度认识这类函数。
	(2) 性质分析	活动1:研究幂函数 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 的性质。
	(3) 图像分析	活动2:画出 $y=x^{-\frac{2}{3}}$ 的大致图像。
环节3:概念理解 如何研究一般幂函数的图像特征和性质	(1) 比较共性	活动3:探究 $y=x^{-\frac{1}{2}}$ 、 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 、 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 、 $y=x^3$ 的性质并画出它们的图像。
	(2) 探索一般	活动4:在获得的八个具体幂函数的图像基础上,探究幂函数图像的共性特征。
	(3) 归纳分类	问题5:发现一般幂函数图像的特征,猜测相应的性质。
环节4:概念应用 研究幂函数的方法和基本路径	(1) 巩固应用	例2:不用计算器,比较 $1.41^{\frac{4}{5}}$ 与 $\sqrt[4]{2^{\frac{4}{5}}}$ 的大小关系。
	(2) 梳理路径	通过对幂函数的学习,了解、研究一类函数的内容和基本思路,为今后研究其他函数积累经验和方法。
	(3) 总结联系	知识:幂函数的概念、幂函数的性质、幂函数的应用。 方法:通过数学抽象,构建相互联系,提炼函数概念;借助函数性质,绘制函数图像,形成研究方法;观察众多图像,猜想论证分类,应用反思结论。 思维:从特殊到一般,经历数学对象研究的一般过程;从具体到抽象,体会函数的概念和性质对函数研究的作用;从归纳到演绎,感悟函数性质在解决代数问题中的工具价值。

表2 数学结构化教学学生行为的观察量表

任课教师	课题		学校			
评价因素			评价等第 A、B、C			得分
一级指标	二级指标	三级指标 (观察点)	评价等第 A	评价等第 B	评价等第 C	
学生讲题 (30分)	知识内容 (10分)	有无相关知识、回忆相关知识、联结相关知识	学生能够将相关知识联结形成知识结构,灵活运用知识结构解决问题(8-10分)	学生能够提取解决问题所必需的知识内容,但是不能有效地将这些知识串联起来形成整体(4-7分)	学生头脑中无法再现与问题相关的知识内容(1-3分)	
	思维方式 (10分)	盲目套用方法、明确运用方法的理由、明确方法的思维方式、创造性运用	学生能不局限于当前的材料,能将所得出的结论运用到新的情境中,解决更为一般和抽象的问题(8-10分)	学生能够找到解决问题的线索,能从全局角度把握问题,将提取的线索有机整合起来,并进行归纳概括,但解决问题具有一定的局限性(4-7分)	学生没有真正理解问题,无法排除问题中所给出的干扰信息和无用信息,进而无法提取有效信息正确完成任务,考虑问题的方式简单(1-3分)	
	情感价值 (10分)	不敢面对开始尝试执着探索	面对难题表现出执着探索、不放弃的精神,并最终能创造性地解决问题(8-10分)	能对问题进行初步的探索,但是能力不足(4-7分)	放弃思索问题,不敢直面解决问题(1-3分)	
认知经历 (概念图问卷学生) (40分)	建构方式 (10分)	学习成就在知识内容、思维方法或意义上	学生能知道学习知识的内蕴意义(8-10分)	学生能明了知识的产生过程并能理解它的基本逻辑形式(4-7分)	学生对知识的理解停留在知识的记忆和符号的认知层面(1-3分)	
	概念表征 (10分)	举例情境、例子、式子或图形与概念关系	能够从多方面对概念进行多元表征(8-10分)	对概念仅能进行单一表征(4-7分)	无法进行概念表征或者表征不恰当(1-3分)	
	概念系统 (10分)	概念间的联系	对涉及的相关概念能按照一定的逻辑顺序梳理归类,建立起以核心概念为中心的知识系统(8-10分)	能建立一定的联系,但是缺乏对本质的认识(4-7分)	不能建立联系,或者建立错误联系(1-3分)	
	知识核心 (10分)	说明知识的核心是什么	能完整地理解概念,能指出知识的核心思想(8-10分)	能通过简单的例子说明对知识的理解(4-7分)	不能完整地叙述知识的定义(1-3分)	
学生生成 (30分)	问题提出 (10分)	表层问题、一般性问题、核心问题	学生能在数学情境中发现问题的本质,创造的问题触及知识核心(8-10分)	学生能在数学情境中提出新的问题,能在解决问题过程中对问题进行再阐述,但是问题并没有真正触及核心(4-7分)	学生在数学情境中提出的问题流于表面(1-3分)	
	自主观点 (10分)	有思路、有逻辑、有方法	能够有逻辑地表述自己的想法,能够对所用的数学知识和方法进行总结(8-10分)	有一定的模糊的思路,但是不能具体地给出解决问题的方案(4-7分)	想法杂乱无序,没有明显的逻辑过程(1-3分)	
	情感态度 (10分)	学习有兴趣、愉悦	能够勇敢地面对数学学习带来的挑战,享受数学学习的过程(8-10分)	对数学学习有兴趣,有学习欲望,能体会到数学学习的愉悦性(4-7分)	对数学学习没有兴趣,甚至感到害怕(1-3分)	
评议人			学生行为等第	总分		
注:一般得分86-99分,为A等,评为优秀;得分71-85分,为B等,评为良好;得分60-70分,为C等,评为一般;低于60分,为D等,评为较差。						