精析结构　多解探究　关注思维　寻根探源

——一道联考压轴题的解法探究与背景探源

巨小鹏

(陕西省汉中市龙岗学校,陕西 汉中 723102)

摘　要: 本文对2023届高三第一次学业质量评价数学第16题第一空做了多视角解法探究,对第二空做了推广和背景探源分析,最后通过反馈练习理解双曲线中渐切三角形面积为定值这一应用.

关键词: 压轴题;解法探究;背景探源;渐切三角形

中图分类号: G632　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1008-0333(2024)01-0089-05

解析几何问题中,几何是思考的起点和终点,也是问题的缘起和归宿,代数化和"几何"特征是解决几何问题的工具.加深几何特征和曲线与方程有关概念的理解,从不同角度分析其几何结构,并寻求其思维方法根源,将解决问题思维结构化,以提升"猜想证明、化归转化、直观想象、数学运算、严谨逻辑推理和探索实践应用"等关键能力为目标,内化数学核心素养[1].

1 试题呈现

题目 (2023届高三第一次T8联考16题)已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1 和 F_2,O 为坐标原点,过点 F_2 作渐近线 $y=\frac{b}{a}x$ 的垂线,垂足为点 P,若 $\angle F_1PO=\frac{\pi}{6}$,(1)双曲线的离心率为____;(2)过点 P 作双曲线的切线交另一条渐近线于点 Q,且 $S_{\triangle OPQ}=2\sqrt{3}$,则该双曲线的方程为____.

2 试题分析与解答

分析 第一空求双曲线离心率要么直接求出 a,b 和 c 中的任意两个,要么求出 a,b 和 c 之间的关系,从而求得离心率.根据题意给的几何关系以及条件 $\angle F_1PO=\frac{\pi}{6}$,会想到正弦定理和余弦定理,根据几何特征,可求得 $|PF_2|=b$,$|OP|=a$,从而解三角形求得 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}b$ 这一重要结果,即可求得双曲线的离心率.

第二空,过点 P 的切线 PQ 与双曲线切于点 $M(x_0,y_0)$,设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,表示出 $S_{\triangle POQ}=\frac{b}{a}|x_1x_2|$,利用双曲线的切线方程联立渐近线方程

收稿日期: 2023-10-05

作者简介: 巨小鹏,男,陕西省汉中人,硕士,中学一级教师,从事数学教育、课程与教学论研究.

基金项目: 陕西省教育科学"十四五"规划2021年度课题"教材'阅读材料'在数学学习中的渗透与引领策略研究"(项目编号:SGH21Y1194)

求得 $x_1x_2=a^2$,从而根据三角形面积求得 b,即可求得双曲线方程.

2.1 第(1)问解析

解法1 (正弦定理视角)设 $\angle POF_2=\alpha$,则有 $\tan\alpha=\frac{b}{a}$,$F_2(c,0)$到渐近线 $y=\frac{b}{a}x$ 即 $bx-ay=0$ 的距离为 $|PF_2|=\frac{|bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|bc|}{\sqrt{c^2}}=b$.

而 $\tan\alpha=\frac{|PF_2|}{|OP|}=\frac{b}{a}$,又因为 $|OP|=a$,

所以 $\sin\alpha=\frac{b}{c}$,$\cos\alpha=\frac{a}{c}$.

在 $\triangle OF_1P$ 中,$\angle F_1PO=\frac{\pi}{6}$,

根据正弦定理,得 $\frac{a}{\sin[\alpha-(\pi/6)]}=\frac{c}{\sin(\pi/6)}$.

即 $\frac{a}{(b/c)\cdot(\sqrt{3}/2)-(a/c)\cdot(1/2)}=2c$.

所以 $a=\sqrt{3}b-a$.

则 $2a=\sqrt{3}b$. 即 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}b$.

所以 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$.

解法2 (余弦定理视角)可知 $F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$,PF_2 的方程为 $y=-\frac{a}{b}(x-c)$,与直线 $y=\frac{b}{a}x$ 联立得 $P\left(\frac{a^2}{c},\frac{ab}{c}\right)$.

所以 $|PF_1|=\sqrt{\left(\frac{a^2+c^2}{c}\right)^2+\left(\frac{ab}{c}\right)^2}=\sqrt{3a^2+c^2}$.

又因为 $|OP|=\sqrt{\left(\frac{a^2}{c}\right)^2+\left(\frac{ab}{c}\right)^2}=a$,$|OF_1|=c$,

在 $\triangle OPF_1$ 中,根据余弦定理,得

$|OF_1|^2=|PF_1|^2+|OP|^2-2|OP||PF_1|\cdot\cos\angle F_1PO$.

则 $c^2=3a^2+c^2+a^2-2a\sqrt{3a^2+c^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$.

即 $3c^2=7a^2$.

所以 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{7}{3}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$.

解法3 (中线定理+余弦定理视角)根据解法1可知 $|PF_2|=b$,$|OP|=a$,$|OF_1|=c$.

根据三角形中线定理,得

$|PF_1|^2+|PF_2|^2=2|OP|^2+|OF_1|^2$.

所以 $|PF_1|=\sqrt{3a^2+c^2}$,下同解法2.

解法4 (辅助线视角1)根据解法1可知 $|PF_2|=b$,$|OP|=a$,$|OF_1|=c$.

过点 P 作 $PH\perp F_1F_2$ 于点 H,则

$|OH|=\frac{a^2}{c}$,$|PH|=\frac{ab}{c}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PHF_1$ 中,根据勾股定理,得

$|PF_1|^2=|PH|^2+|F_1H|^2=3a^2+c^2$,下同解法2.

解法5 (辅助线视角2)根据解法1可知 $|PF_2|=b$,$|OP|=a$,$|OF_1|=c$.

如图1,过点 F_1 作 F_1M 垂直于渐近线 $y=\frac{b}{a}x$ 于点 M,可知 $\mathrm{Rt}\triangle OMF_1\cong\mathrm{Rt}\triangle OPF_2$,$|OP|=|OM|$.

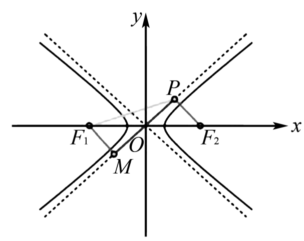

图1 解法5示意图

在 $\mathrm{Rt}\triangle PMF_1$ 中,$|PM|=\sqrt{3}b=2|OP|=2a$,下同解法2.

解法6 (辅助线视角2优化)在 $\mathrm{Rt}\triangle PMF_1$ 中,$\tan\angle F_1PM=\frac{F_1M}{PM}=\frac{b}{2a}=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,则 $\frac{b}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

则 $e=\sqrt{(\frac{b}{a})^2+1}=\frac{\sqrt{21}}{3}$.

解法7 (辅助线视角2优化)过点 F_1 作 F_1M 垂直于渐近线 $y=\frac{b}{a}x$ 于点 M 并延长至点 M',使得 $|F_1M|=|F_1M'|$.

因为 $\angle F_1PM=\dfrac{\pi}{6}$,所以 $\triangle PF_1M'$ 是边长为 $2b$ 的等边三角形.

所以 $|PM|=2a=\sqrt{3}b$. 下同解法 6.

解法 8 (张角定理视角) 根据解法 1 可知 $|PF_2|=b$, $|OP|=a$, $|OF_1|=c$.

根据张角定理,得

$$\frac{\sin\angle F_1PF_2}{|OP|}=\frac{\sin\angle F_1PO}{|PF_2|}+\frac{\sin\angle OPF_2}{|PF_1|}.$$

即 $\dfrac{\sqrt{3}/2}{a}=\dfrac{1/2}{b}+\dfrac{1}{|PF_1|}$.

得 $|PF_1|=\dfrac{2ab}{\sqrt{3}b-a}$.

又因为 $S_{\triangle POF_1}=S_{\triangle POF_2}$,

所以 $\dfrac{1}{2}a|PF_1|\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}ab\sin\dfrac{\pi}{2}$.

所以 $|PF_1|=2b$.

所以 $\dfrac{2ab}{\sqrt{3}b-a}=2b$. 则 $2a=\sqrt{3}b$.

即 $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}b$.

所以 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$.

解法 9 (张角定理+邻补角+正弦定理视角)

由解法 8 得 $|PF_1|=\dfrac{2ab}{\sqrt{3}b-a}$.

在 $\triangle OPF_1$ 中, $\sin\angle POF_1=\sin\angle POF_2=\dfrac{b}{c}$,

根据正弦定理,得

$$\frac{|PF_1|}{\sin\angle POF_1}=\frac{c}{\sin\angle F_1PO}.$$

即 $\dfrac{2ab/(\sqrt{3}b-a)}{b/c}=\dfrac{c}{1/2}$.

则 $2a=\sqrt{3}b$.

即 $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}b$.

所以 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$.

评注 本题破题关键是找到 a, b 和 c 之间的关系得到 $2a=\sqrt{3}b$. 解法 1 和 2 以正弦定理为目标,做种种转化,解法 3 引入中线定理,解法 4、5、6 利用条件中的垂直和 $\dfrac{\pi}{6}$,借助辅助线和其几何特征使思路更加清晰明了,解法 8 和 9 利用了张角定理和正弦定理解决,此法不易想到,但不失为一个解决问题的好方法,当然解法 8 用完面积法也可以用余弦定理求得离心率. 考查学生对基础知识和基本方法的掌握和理解,也考查了学生观察几何特征和代数运算等关键能力.

2.2 第(2)问解析

解析 如图 2,过点 P 的切线 PQ 与双曲线切于点 $M(x_0,y_0)$,设 $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$,又因为点 P, Q 均在双曲线的渐近线上,故设 $P\left(x_1,\dfrac{b}{a}x_1\right)$, $Q\left(x_2,-\dfrac{b}{a}x_2\right)$,又因为 $\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$,

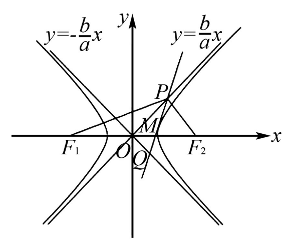

图 2 第(2)问解析图

所以 $\sin2\alpha=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$

$=\dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

$=\dfrac{2\cdot b/a}{1+(b/a)^2}$

$=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$.

所以 $S_{\triangle POQ}=\dfrac{1}{2}|OP||OQ|\sin2\alpha$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{x_1^2+\left(\dfrac{b}{a}x_1\right)^2}\cdot\sqrt{x_2^2+\left(-\dfrac{b}{a}x_2\right)^2}\cdot\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$

$=\dfrac{b}{a}|x_1x_2|$.

过点 M 的切线 PQ 方程为$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$.

即 $y=\frac{b^2x_0x}{y_0a^2}-\frac{b^2}{y_0}$.

代入 $b^2x^2-a^2y^2=0$,化简,得

$(a^2y_0^2-b^2x_0^2)x^2+2a^2b^2x_0x-a^4b^2=0$.

又因为 $b^2x_0^2-a^2y_0^2=a^2b^2$,

所以 $-a^2b^2x^2+2a^2b^2x_0x-a^4b^2=0$.

即 $x^2-2x_0x+a^2=0$.

所以 $x_1x_2=a^2$.

所以 $S_{\triangle POQ}=\frac{b}{a}|x_1x_2|=ab=\frac{\sqrt{3}}{2}b\cdot b=2\sqrt{3}$.

即 $b=2,a=\sqrt{3}$.

故双曲线的方程为$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$.

评注 设出 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$,破题关键要利用过双曲线上一点的切线方程联立渐近线方程,根据韦达定理求得 $x_1x_2=a^2$,进而利用三角形面积解决问题,当然此题也可进行仿射变换仿射成反比例函数解决,不再赘述.本题是一类特殊的中心三角形,即双曲线的渐近线与切线围成的三角形称为渐切三角形.

3 试题背景探源

3.1 渐切三角形问题

若直线 l 与直线 $l_1:bx-ay=0$、直线 $l_2:bx+ay=0$ 分别交于 P,Q 两点,且直线 l 与双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$只有一个公共点 M,则

(1)切点 M 为 P,Q 中点;

(2)$\triangle OPQ$ 的面积为定值 ab[2];

(3)$k_{OM}\cdot k_{PQ}=\frac{b^2}{a^2}$.

证明 (1)当切线斜率不存在时,此时顶点即为 P,Q 中点;当切线斜率存在时,设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,切线方程为 $y=kx+m$,与 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$联立,得

$(b^2-a^2k^2)x^2-2kma^2x-a^2(b^2+m^2)=0$.

则 $x_1+x_2=\frac{2kma^2}{b^2-a^2k^2}$.

即切点 M 横坐标为$\frac{kma^2}{b^2-a^2k^2}$.

切线方程为 $y=kx+m$,与 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ 联立得

$(b^2-a^2k^2)x^2-2kma^2x-a^2b^2=0$.

则 $x_1+x_1=\frac{2kma^2}{b^2-a^2k^2}$.

即 P,Q 中点横坐标为$\frac{kma^2}{b^2-a^2k^2}$.

即切点 M 为 P,Q 中点.

(2)当切线斜率不存在时,即 $x=\pm a$,此时 $\triangle OPQ$ 的面积为定值 ab;

当切线斜率存在时,证明参考2023届T8联考16题第二空解法.

(3)因为 P,Q 两点在直线 l_1 和直线 l_2 上,则

$\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=0,\\ \frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=0.\end{cases}$ 作差后,得

$$\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}\cdot\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{(y_1+y_2)/2}{(x_1+x_2)/2}\cdot\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{b^2}{a^2}.$$

即$k_{OM}\cdot k_{PQ}=\frac{b^2}{a^2}$.

3.2 高考试题背景探源

(2014年高考福建理科19题)已知双曲线 E:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的两条渐近线分别为直线 $l_1:y=2x$、直线 $l_2:y=-2x$.

(1)求双曲线 E 的离心率;

(2)如图3,O 为坐标原点,动直线 l 分别交直

线 l_1,l_2 于 A,B 两点(A,B 分别在第一,四象限),且 $\triangle AOB$ 的面积恒为 8,试探究:是否存在总与直线 l 有且只有一个公共点的双曲线 E?若存在,求出双曲线 E 的方程;若不存在,说明理由.

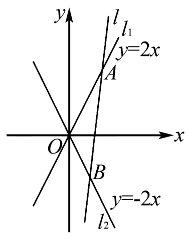

图 3　2014 年高考福建理科 19 题图

解析　(1)因为双曲线 E 的渐近线分别为 $y=2x$,$y=-2x$. 所以 $\frac{b}{a}=2$.

所以 $\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{a}=2$. 所以 $c=\sqrt{5}a$.

从而双曲线 E 的离心率 $e=\sqrt{5}$.

(2)由(1)知,双曲线 E 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4a^2}=1$.

设直线 l 与 x 轴相交于点 C.

当 $l\perp x$ 轴时,若直线 l 与双曲线 E 有且只有一个公共点,则 $|OC|=a$,$|AB|=4a$.

又因为 $\triangle OAB$ 的面积为 8,

所以 $\frac{1}{2}|OC|\cdot|AB|=8$.

所以 $\frac{1}{2}a\cdot 4a=8$,解得 $a=2$.

此时双曲线 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$.

若存在满足条件的双曲线 E,则 E 的方程只能为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$.

以下证明:当直线 l 斜率不存在时,双曲线 E:$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$ 也满足条件.

当直线 l 斜率存在时设直线 l 的方程为 $y=kx+m$,依题意,得 $k>2$ 或 $k<-2$. 则 $C(-\frac{m}{k},0)$. 记 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由 $\begin{cases} y=2x, \\ y=kx+m, \end{cases}$ 得 $y_1=\frac{2m}{2-k}$.

同理得 $y_2=\frac{2m}{2+k}$.

由 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|OC|\cdot|y_1-y_2|$,

得 $\frac{1}{2}|-\frac{m}{k}|\cdot|\frac{2m}{2-k}-\frac{2m}{2+k}|=8$.

即 $m^2=4|4-k^2|=4(k^2-4)$.

由 $\begin{cases} y=kx+m, \\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1, \end{cases}$ 得

$(4-k^2)x^2-2kmx-m^2-16=0$.

因为 $4-k^2<0$,所以 $\triangle=4k^2m^2+4(4-k^2)(m^2+16)=-16(4k^2-m^2-16)$.

又因为 $m^2=4(k^2-4)$,所以 $\triangle=0$.

即 l 与双曲线 E 有且只有一个公共点.

综上所述,存在总与 l 有且只有一个公共点的双曲线 E,且 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1$.

4 结束语

本题考查了双曲线的性质、直线与双曲线的位置关系和渐切三角形的面积表示,考查学生对基本概念和基本性质的理解以及数学运算等核心素养. 2015 年湖北理科 21 题考查了椭圆中渐切三角形问题,后期会继续进行探究.

参考文献:

[1] 巨小鹏. 强化“几何”特征 重视“结合”意识:例谈解析几何中强化“几何”特征和综合解题意识培养[J]. 数理化解题研究,2022(31):25－30.

[2] 苏汉杰,赵月灵. 双曲线的切线与渐近线所围成的三角形面积的探究[J]. 中小学数学,2022(Z2):65－66.

[责任编辑:李　璟]