# 解答圆锥曲线离心率问题常用的方法分析

肖毅（江西省吉安市遂川县燕山中学　343900）

**【摘　要】**　圆锥曲线的相关问题中，离心率是一个基础但又重要的考点，除了在选择题、填空题中有所涉及，更是解答题中的必考问题．而看似简单的问题，学生在实际解答中，效果并不理想．为帮助学生全面掌握离心率问题的解题方法，本文总结常用的几种解题方法，以提升学生的解题效率．

**【关键词】**　高中数学；圆锥曲线；离心率

离心率是圆锥曲线试题中的必考问题．在实际的问题中，在面对不同的题型时，也有不同的解题方法．为帮助学生更加全面的掌握离心率问题的解题思路，本文结合相关问题，分析常用解题方法，以提升学生解题效率．

## 1　基础定理

圆锥曲线中，其离心率 $e=\frac{c}{a}$，并且椭圆中存在 $b^2+c^2=a^2$、双曲线中存在 $a^2-b^2=c^2$ 等关系．因此，在实际解题中，便可以根据题目信息求出 $a$、$b$ 和 $c$ 的值或是存在的关系，便可以得到离心率 $e=\frac{c}{a}$．

**例1**　过双曲线 $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 左顶点 $A$ 作斜率为 1 的直线 $l$，$l$ 与双曲线两条渐近线分别相交于 $B$，$C$，且 $|AB|=|BC|$，求双曲线的离心率．

**解析**　由 $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$，

可得，$a=1$，

则 $A(-1,0)$，直线 $l$ 方程为 $y=x+1$，

则直线与渐近线 $y=-bx$ 和 $y=bx$ 交点分别为

$B\left(-\frac{1}{b+1},\frac{b}{b+1}\right)$，$C\left(\frac{1}{b-1},\frac{b}{b-1}\right)$，

因为 $|AB|=|BC|$，可得 $b^2=9$，

则 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{10}$，

所以 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{10}$，故双曲线离心率为 $\sqrt{10}$．

**点评**　这类问题相对而言，难度不大，在解题中，首先根据题意分别求得 $a$、$b$ 的值，而后根据 $a^2-b^2=c^2$，便可得 $c$ 和 $e$ 的值．

## 2　定义法

圆锥曲线具有诸多定义，在解答离心率相关问题时，可以借助圆锥曲线定义进行解答．在解题中，根据第一定义，得出 $a$，$b$，$c$ 之间的关系式；根据第二定义，明确曲线上的点到准线的距离，便可得到离心率．

**例2**　$F_1$，$F_2$ 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的两个焦点，若双曲线上存在点 $A$，使 $\angle F_1AF_2=90°$，且 $|AF_1|=3|AF_2|$，则双曲线的离心率为（　　）

(A) $\frac{\sqrt{5}}{2}$．　(B) $\frac{\sqrt{10}}{2}$．　(C) $\frac{\sqrt{15}}{2}$．　(C) $\sqrt{5}$．

**解析**　设 $|AF_2|=t$，$|AF_1|=3t(t>0)$，

由双曲线定义 $X$ 有：$2a=|AF_1|-|AF_2|=2t$，

$2c=\sqrt{|AF_1|^2+|AF_2|^2}=\sqrt{10}t$，

则双曲线离心率 $e=\frac{\sqrt{10}}{2}$，故正确选项为(B)．

**点评**　本题主要考查学生对圆锥曲线定义的运用，即由题目中给出的 $|AF_1|=3|AF_2|$，联系双曲线定义：动点到两个焦点的距离之差为定值，则有 $|AF_1|-|AF_2|=2a$，而后可以建立关于 $a$，$c$ 之间的关系式，进而得到双曲线离心率．

## 3　几何法

在圆锥曲线离心率的问题中，由许多问题会与几何问题进行结合．在面对这类问题时，学生便可以借助相关图象的性质，建立起关系式，进行解答．如此可以避开复杂的计算，从而提高学生的解题效率．

**例3**　双曲线 $C$：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 左顶点和右焦点分别为 $A$、$F$ 两点，过点 $F$ 向双曲线的一条渐近线引垂线 $l$，与 $y$ 轴交于点 $B$，以线段 $AF$ 为直径的圆过点 $B$，求 $C$ 的离心率．

**解析**　根据题意，画出如图 1 所示的示意图．

设直线 $l$ 与渐近线交于点 $E$，因为以 $AF$ 为直径的圆过点 $B$，所以 $AB\perp BF$，则有 $AB//OE$．因此，

$\tan\angle BAO=\tan\angle EOF$，即 $\frac{|OB|}{|OA|}=\frac{|EF|}{|OE|}$，

其中 $|EF|=b$，$|OE|=\sqrt{|OF|^2-|EF|^2}=$

$\sqrt{c^2-b^2}=a$，

所以 $|OB|=b$.

因为 $\angle BAO=\angle EOF$，$\angle ABO=\angle AFB$，

所以 $\triangle OAB \backsim \triangle OBF$，

所以 $OB^2=OA\cdot OF$，即 $b^2=ac$，

于是 $c^2-a^2=ac$，即 $e^2-e-1=0$.

解得 $e=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

**点评**　解答本题中，重点在于通过题目中给出的“以线段 $AF$ 为直径的圆过点 $B$”这一信息，得出 $\angle ABF=90°$，从而进一步得到 $\triangle OAB \backsim \triangle OBF$，借助这一几何关系，可得到关于 $a,b,c$ 的代数关系式，进而得到离心率 $e$.

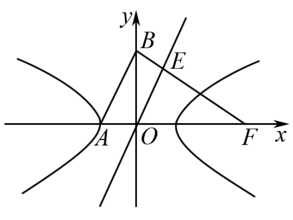


图 1

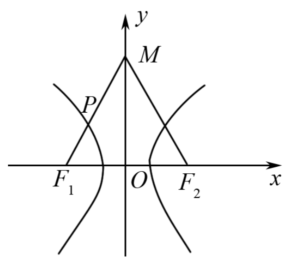


图 2

## 4　齐次式法

齐次式法是通过构建齐次式来解答圆锥曲线离心率问题的方法. 在根据题目信息，难以计算出 $a,c$ 的值时，此时便可以根据题目信息，借助 $a,b,c$ 之间的关系，构造关于 $a,c$ 的齐次式，而后通过解方程，得到离心率 $e$.

**例 4**　已知 $F_1,F_2$ 分别是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$ 的两个焦点，以线段 $F_1F_2$ 为边作正三角形 $MF_1F_2$，若 $MF_1$ 的中点在双曲线上，求双曲线的离心率.

**解析**　结合题意，绘制如图 2 所示的图形，

设 $|OF_1|=c$，$MF_1$ 中点为 $P$，

点 $P$ 横坐标为 $-\dfrac{c}{2}$，

所以 $|PF_1|=\dfrac{1}{2}|F_1F_2|=c$，

由焦半径公式得 $|PF_1|=-2x_p-a$，

所以 $c=-\dfrac{c}{a}\times\left(-\dfrac{c}{2}\right)-a$，

即 $e^2-2e-2=0$，

解得 $e_1=1+\sqrt{3}$，$e_2=1-\sqrt{3}$(舍去)，

所以双曲线离心率为 $1+\sqrt{3}$.

**点评**　解答本题时，通过双曲线方程及焦半径公式建立关于 $a,c$ 的齐次式，而后根据式子结构，同时除以 $a^2$，便可得到关于 $e$ 的一元二次方程，便可得到答案.

## 5　方程法

一些离心率问题中，会出现直线等元素，而此可以将圆锥曲线与直线方程进行联立，而后结合一元二次方程判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 或韦达定理，建立关于 $a,c$ 的方程，而后通过解方程得到 $e$.

**例 5**　双曲线 $C$：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 渐近线与抛物线 $y=x^2+1$ 相切，求双曲线的离心率.

**解析**　双曲线 $C$：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，

则其渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$，

将 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ 代入 $y=x^2+1$，

可得 $x^2+1\pm\dfrac{b}{a}x=0$，

因为 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ 和抛物线 $y=x^2+1$ 相切，

则 $x^2+1\pm\dfrac{b}{a}x=0$ 仅有一个实数根，

即 $\Delta=b^2-4ac=\left(\dfrac{b}{a}\right)^2-4=0$，

整理得 $\dfrac{c^2-a^2}{a^2}=4$，即 $\dfrac{c^2}{a^2}=5$，

即 $e^2=5$，则 $e=\sqrt{5}$，

因此，双曲线的离心率 $e=\sqrt{5}$.

**点评**　在解答本题中，首先需要得到双曲线的渐近方程，然后将其与抛物线方程联立，得到关于 $x$ 的一元二次方程，而后使 $\Delta=0$，得到关于 $e$ 的方程，便可解答问题.

## 6　结语

综上所述，本文总结了解答圆锥曲线中离心率问题的常用方法. 在日常学习中，需要学生夯实相关基础知识，熟练掌握各种方法，结合题意选择合适的方法解答问题.


**参考文献：**

[1] 袁晓光. 求解圆锥曲线离心率问题的两种思路[J]. 语数外学习(高中版中旬)，2023(02)：52.

[2] 梁启浩. 用几何法速解离心率试题[J]. 中学生理科应试，2022(12)：12－14.

[3] 石翠娥. 圆锥曲线离心率求解策略[J]. 中学教学参考，2023(05)：23－25.