波利亚解题模型在高中数学解题教学中的运用分析

冯　洁

（江苏省常州市龙城高级中学，江苏 常州 213000）

摘　要：培养高中生数学解题能力，是判断学生知识掌握和应用情况的关键指标，同时也是提升学生学习兴趣的重要途径. 鉴于当前高中生在解题中面临的重重困难，科学融入波利亚解题模型，可促使学生在“理清题意、制定计划、执行计划、检验与回顾”的解题流程中高效解答题目，逐渐提升学生的解题能力. 本文聚焦于此，结合解题实践，针对波利亚解题模型在数学解题中的应用展开了详细探究.

关键词：高中数学；解题能力；波利亚解题模型；课堂教学

中图分类号：G632　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1008-0333(2023)30-0014-03

波利亚解题模型源于波利亚《怎样解题：数学思维的新方法》. 在该书中，波利亚紧紧围绕“解决数学问题”这一中心任务，提出了“波利亚解题模型”，倡导学生在解题时，应遵循“理清题意——制定计划——执行计划——检验与回顾”四个流程开展. 其中，“理清题意”即为理解题目意思、明确题目已知条件、所求问题等，这是学生高效解题的关键；“制定计划”是联系题目已知条件、所求问题，运用所学的知识进行思考，寻找解题思路；“执行计划”则是依据上一个阶段中制定的解题思路，利用所学的知识、方法进行推理、运算，最终得出正确的结论；“检验与回顾”则是对整个解题过程进行回顾、反思、总结，在检验解题正确与否的基础上，进行知识积累，并为学生后续的解题奠定基础[1]. 鉴于波利亚思想的内涵，将其应用到高中数学解题教学中，已经成为一线教师研究的重点.

1 高中数学解题教学状况

1.1 解题教学驱动性不足，学生学习积极性较低

新课标执行前期，高中数学解题教学大多仍以讲解式教学和练习式教学为主. 讲解式教学由教师主导，注重对问题进行剖析和讲解，学生处于被动学习状态；练习式教学则以学生为主体，对学生自主学习能力和独立思考能力要求较高. 因此，教师教学设计不够全面，教学模式趣味性较低，导致解题教学驱动性不足，学生学习缺乏主动性等现象在讲解式教学和练习式教学中都有体现. 在讲解式教学中的体现为学生注意力不集中，打瞌睡、走神等现象频发；在练习式教学中的体现为学生解题效率较低、正确度较低. 例如，教师在讲解“椭圆的标准方程”相关的知识点时，会在引导学生进行等式的化简后推导出椭圆的标准方程，但因为学生对于等式的化简存在困难，而课堂时间有限，造成学生缺少练习时间，教师也需要进行后续的讲解. 这造成“一步慢，步步慢”的情况，学生也无法跟上教师后续的讲解进度，学习自信心也会受到打击.

1.2 解题教学创新性不足，难以培养学生核心素养

新课程标准指出，高中数学教学需要在传授知识的基础上培养学生的运用能力、创新精神、核心素养等综合能力. 数学习题每年都会迎来一定的创新，

收稿日期：2023-07-25

作者简介：冯洁(1996.11-)，女，江苏省溧阳人，硕士，中小学二级教师，从事高中数学教学研究.

虽然考查的内容大体相同,但解题思路会发生一定的改变. 前期高中数学教师因为没有针对性地培养学生的解题能力和核心素养,导致学生掌握了某一个问题的解题方法,并未掌握这一类题型的解题方法. 例如,教师在讲解"已知函数 $f(x)=ln(x+x^2+1)$,若实数 a,b 满足 $f(a)+f(b-1)=0$,则 $a+b=?$"这一问题的核心在于观察 $f(x)$ 在定义域内是增函数还是减函数. 教师在讲解时也会按部就班地完成讲解,但在实际过程中缺乏引导学生深度思考的过程,导致学生只能将解题方法运用到这一个题目上,无法触类旁通.

1.3 忽视回顾与反思环节,解题教学有效性不足

回顾反思作为解题教学的收尾阶段,其具有帮助学生查漏补缺、增强学生记忆力、提升学生解题思维的重要作用. 但在当前高中数学教学中,仍有部分教师忽视回顾反思教学开展,导致解题教学有效性不足. 以"立体几何初步"这一章节知识点为例,教师在讲解完成之后会为学生布置相关的复习任务,如进行习题训练等. 因为教师并未了解学生的实际学情,其很难针对性地布置复习任务,因此大部分教师会选择"题海战术",试图通过量变来引起质变. 并且,学生在完成复习任务之后教师的评价也极其简单,大都只有几个"对钩"或者一个"阅"字,复习任务的有效性难以充分体现,学生也无法根据教师的评价确定自身的问题. 久而久之,学生的复习积极性会不断降低,学习压力也会因为题海战术不断增加.

2 波利亚解题模型在高中数学解题教学中的实践应用

为对波利亚解题模版在解题中的应用展开深入研究,笔者结合以下两道题目进行了详细的探究:

例 1 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,$a_1=2$,$2S_2=a_2+a_3$ 求:

(1)等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式?

(2)设 $b_n=\dfrac{2n-1}{a_n}$,求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和?

基于波利亚解题模型,在解答这一问题时,可从以下四个方面进行:

第一,理清题意. 引导学生自己读题、审题,理解题目的含义,明确题目中的已知条件、未知内容、所求目标等. 在本题中学生经过审题,理清了题目中已知条件、所求目标. 其中,已知条件:数列 $\{a_n\}$ 的首项、第二项和第三项的和、$\{a_n\}$ 是正项等比数列;所求目标:数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的通项公式,以及 $\{b_n\}$ 的前 n 项和?

第二,制定计划. 本阶段是形成解题思路的核心,主要是聚焦所求的问题,围绕已知量和未知量之间的关系进行探究,并在此基础上形成解题思路. 在本题目中,先将题目中已知条件和所求问题联系起来,并由"等比数列的通项公式、数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和"展开联想. 在此基础上通过讨论、分析,逐渐形成本题目的解题思路:针对(1)来说,需要借助等比数列的性质,前 n 项和求和公式,将 $\{a_n\}$ 的首项和公比 q 求出来;针对(2)来说,则需要借助数列 $\{a_n\}$ 的通项公式,将 $\{b_n\}$ 的通项公式求出来. 接着再利用错位相减的方法,将 $\{b_n\}$ 前 n 项和求出来.

第三,执行计划. 主要是按照上述设计的解题思路进行解答. 在本题目中根据上述分析所形成的解题思路,按照如下步骤执行解题:

(1)设数列 $\{a_n\}$ 公比为 $q(q>0)$,

因为 $2S_2=a_2+a_3$,所以 $2(a_1+a_2)=a_1q+a_2q$,$q=2$

所以 $a_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$

(2)根据题目(1)得出:$b_n=\dfrac{2n-1}{a_n}=\dfrac{2n-1}{2^n}$,假设 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n

则 $T_n=1\times\dfrac{1}{2}+2\times(\dfrac{1}{2})^2+5\times(\dfrac{1}{2})^3+\cdots+(2n-3)\times(\dfrac{1}{2})^{n-1}+(2n-1)\times(\dfrac{1}{2})^n$①

又因为 $\dfrac{1}{2}T_n=1\times(\dfrac{1}{2})^2+3\times(\dfrac{1}{2})^2+\cdots+(2n-3)\times(\dfrac{1}{2})^n+(2n-1)\times(\dfrac{1}{2})^{n+1}$②

由① - ②得出:

$$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+2\times(\frac{1}{2})^2+2\times(\frac{1}{2})^3+\cdots+(\frac{1}{2})^n-(2n-1)\times(\frac{1}{2})^{n+1}$$

即$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+1-(\frac{1}{2})^{n\times 2}-(2n-1)\times(\frac{1}{2})^{n+1}$

所以 $T_n=3-4\times(\frac{1}{2})^n-(2n-1)\times(\frac{1}{2})^n=3-(2n+3)\times(\frac{1}{2})^n$

第四,检验与回顾. 这一环节主要是解题完成之后对其进行检验,看其是否正确. 同时,在这一阶段中,还应及时进行反思和积累,为学生后续解题奠定基础. 在本题目解答完毕后,就先引导学生开展检验,之后围绕整个解题过程进行反思和总结. 对此,有的学生表示本题目中主要围绕等比数列的性质、通项公式、错位相减法进行了考查;还有的学生在总结中提出了解答第一问数列$\{a_n\}$的首项和公比 q 是关键;也有的学生在总结中提出了本题的难点在于第二问,关键是运算[2]. 如此,学生通过反思与总结,不仅掌握了这一类型数学解题的解答技巧,也学会了知识的迁移和应用,真正提升了学生的举一反三能力.

3 高中数学波利亚解题教学启示

波利亚模型是一种重要的、系统化的解题方式,将其应用到数学解题中,可促使学生在“理清题意——制定计划——执行计划——检验与回顾”的引导下,深入挖掘题目中已知条件和所求问题,并引导学生运用所学的知识寻求已知条件和未知条件的内在联系,最终将陌生的数学题目转化成为学生所熟悉的数学解题类型,以便于学生形成明确、清晰的解题思路. 鉴于波利亚模型在数学解题中的应用价值,高中数学教师还应灵活开展课堂教学,引导学生在日常学习中逐渐掌握这一解题技巧和能力.

首先,引导学生灵活应用波利亚“怎样解题”表. 波利亚模型为学生提供了一个常规的解题思路,无论是简单的数学题目,还是复杂的数学题目,都可以按照这一思路展开. 因此,为了引导学生真正掌握这一解题技巧,就应结合具体的题目,引领学生分析题目、确定目标、研究解题思路、解题实践等. 如此,经过一段时间的训练之后,学生就会逐渐形成波利亚解题思维.

其次,深层次挖掘波利亚解题思想观,培养学生的核心素养. 根据波利亚解题的具体流程和内涵,对学生的审题能力、基础知识体系、数学思想、数学运算等都提出了更高的要求. 鉴于此,高中数学教师在日常教学中,还应立足于波利亚解题的思想观,聚焦学生的核心素养设计课堂教学方案,全面加强学生基础知识、数学审题能力、数学抽象素养、常见数学思想教学,借助针对性的训练提升学生的数学综合素养.

最后,重视检验与总结. 波利亚解题模型中的四个步骤组成了一个系统化的解题体系. 在实际应用中,部分教师常常忽视回顾和检验. 鉴于此,在日常解题教学时,应给予足够的重视,引导学生完成解题之后及时进行反思,使学生在反思、总结中,领悟数学解题中蕴含的数学思想,内化数学知识,并提升自身的数学解题能力[3].

综上所述,波利亚模型作为一种有效的解题工具,将其应用到数学解题中,不仅提升了学生的数学解题效率,也帮助学生逐渐形成了良好的解题习惯,真正提升了高中生的数学解题能力. 鉴于此,高中数学教师在日常解题教学中,应基于针对性的练习题目,对波利亚解题模型进行细化,使学生在针对性的训练中,逐渐掌握这一解题技巧.

参考文献:

[1] 李辉. 例谈波利亚解题模型在高中数学解题教学中的应用[J]. 语数外学习(高中版上旬),2021(5):55.

[2] 黄倩欣. 基于波利亚解题理论的高中数学习题课教学研究[D]. 海口:海南师范大学,2020.

[3] 赵源. 运用波利亚数学解题表进行高中解题教学的策略研究[J]. 数理化解题研究,2018(12):40-41.

[责任编辑:李　璟]