# 同构函数,妙解三角

◉ 江苏省扬州市仙城中学　程全平

**摘要**:同构意识是高中数学中解决问题时比较常见的一种解题意识与技巧方法.特别在解决一些比较陌生或复杂的三角函数问题时,结合三角关系式的恒等变形与转化,抓住三角关系式的结构特征,合理同构与之相关的函数,进而利用函数的基本性质(奇偶性、单调性等)来解决对应的三角函数问题,总结规律.

**关键词**:三角函数;同构;函数;参数;不等式

三角函数是高中数学的基本知识内容之一,也是高考考查的主干知识之一.三角函数作为一种特殊的函数,在解决一些相关的三角函数问题时,经常可以借助同构函数,回归函数本质,挖掘函数内涵,利用函数的相关概念、基本性质、图象等来巧妙转化并加以处理.特别在解决三角函数中的参数取值、求函数值、大小比较、不等式证明等方面都有奇效[1].

## 1 参数取值

三角函数中的一些参数取值问题,经常借助同构函数思维,结合函数的基本性质来恒等变形与转化,为参数取值的求解提供条件[2].

**例1** (2022年广东省汕头市普通高考第二次模拟考试数学试卷·16)若 $\cos^5\theta-\sin^5\theta<7(\sin^3\theta-\cos^3\theta)$ $(\theta\in[0,2\pi))$,则 $\theta$ 的取值范围是______.

**分析**:根据题设条件,抓住三角关系式的共性特征进行恒等变形与巧妙转化.利用三角函数同名归类,借助不等式的恒等变形,寻找不等式两边的共性,巧妙同构函数,进一步利用导数,合理确定函数的单调性,进而利用函数单调性来转化不等式,即可确定 $\theta$ 的取值范围.

**解析**:由 $\cos^5\theta-\sin^5\theta<7(\sin^3\theta-\cos^3\theta)$,移项整理,可得 $\cos^5\theta+7\cos^3\theta<\sin^5\theta+7\sin^3\theta$.

同构函数 $f(x)=x^5+7x^3$,$x\in[-1,1]$,那么不等式 $\cos^5\theta+7\cos^3\theta<\sin^5\theta+7\sin^3\theta$ 等价于 $f(\cos\theta)<f(\sin\theta)$.

求导可得 $f'(x)=5x^4+21x^2\geqslant0$,则知函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上是增函数.

由 $f(\cos\theta)<f(\sin\theta)$,可得 $\cos\theta<\sin\theta$.

结合 $\theta\in[0,2\pi)$,利用正弦函数与余弦函数的图象,可得 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{5\pi}{4}$,所以 $\theta$ 的取值范围是 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$.

故填答案:$\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$.

**点评**:同构函数来处理,相比三角恒等变形与转化来说,更加简单快捷,处理起来也更加巧妙.当然,对于同构函数单调性的判断,也可以采用其他方式,如以上问题中先判断幂函数 $y=x^3$ 和 $y=x^5$ 在相应区间上的单调性,再综合函数的运算形式与对应的单调性性质来确定函数 $f(x)$ 的单调性.而由三角不等式确定角的取值范围时,也可以利用辅助角公式,结合三角不等式,借助三角函数的图象与性质来转化.

## 2 求函数值

三角函数的求值问题中,有时比较复杂难以直接下手,可以观察三角关系式的结构特征,合理恒等变形,巧妙同构函数,利用函数的基本性质来变形与应用,实现求函数值的目的.

**例2** (多选题)设 $\sin\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\beta=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$,则 $\sin\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)=($　　$)$.

A.$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B.$\frac{1}{2}$　　C.$-\frac{1}{2}$　　D.$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

**分析**:根据题中三角函数的特殊值,有意识地确定两个特殊角满足三角函数关系式,同构三角函数,确定其周期,结合求导处理以及三角函数关系式的恒等变形(和差化积公式),利用三角函数在一个周期长度内的单调性来确定对应角的取值,从而得以求解对应的三角函数值.

**解析**:由于 $\sin\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\beta=\frac{\sqrt{3}+1}{2}=\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{6}$,$\sin\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\beta=\frac{\sqrt{3}+1}{2}=\sin\frac{5\pi}{6}+\sin\frac{2\pi}{3}$,因此可同构函数 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin x$,$x\in\mathbf{R}$,易知函数 $f(x)$ 的周期为 $2\pi$.

求导可得 $f'(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos x=2\cos\frac{\pi}{12}\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$.

不妨取一个周期长度 $x+\frac{\pi}{12}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$.

当 $x+\frac{\pi}{12}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 时,$f'(x)\geqslant0$,函数 $f(x)$

单调递增,此时 $\beta=\frac{\pi}{6}$,可得 $\sin\left(\beta-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$.

当 $x+\frac{\pi}{12}\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 时,$f'(x)\leqslant 0$,函数 $f(x)$ 单调递减,此时 $\beta=\frac{2\pi}{3}$,可得 $\sin(\beta-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选择答案:AC.

**点评**:此题以三角等式为问题背景,结合条件来求解相应的三角函数值.常用的解题方法就是利用三角函数的公式变形来处理,过程比较繁杂,运算量比较大.而抓住特殊角满足的三角等式加以切入,巧妙同构三角函数,借助导数法来处理,思维性较强,可以减少数学运算,优化解题过程[3].

## 3 大小比较

三角函数中也存在一些比较变量大小关系的问题,经常可以借助题设条件,寻找特征,同构函数,进而利用函数的基本性质来合理转化与巧妙应用,实现大小关系的判断.

**例3** 已知实数 $a,b$ 满足 $a\sin a-4b\sin b\cos b=4b^2-a^2+1$,则以下各选项中大小关系正确的是(　　).

A.$a>2b$　　B.$a<2b$

C.$|a|>|2b|$　　D.$|a|<|2b|$

**分析**:根据题设条件,结合题设中的等式进行同一参数的变形转化,实现等式两边的同型转化,巧妙同构函数;结合函数的奇偶性,以及借助导数法判断函数的单调性,进而利用函数的基本性质来综合分析与处理,实现参数大小关系的判断.

**解析**:由 $a\sin a-2b\sin 2b=4b^2-a^2+1$,可得 $a\sin a+a^2=4b^2+2b\sin 2b+1$.

又由于 $a\sin a+a^2=(2b)^2+2b\sin 2b+1>(2b)^2+2b\sin 2b$,因此同构函数 $f(x)=x\sin x+x^2$,$x\in\mathbf{R}$.

因为 $f(-x)=-x\sin(-x)+(-x)^2=x\sin x+x^2=f(x)$,所以函数 $f(x)$ 为偶函数.

求导,可得 $f'(x)=\sin x+x\cos x+2x$.

当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时,$f'(x)\geqslant 0$;当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},+\infty\right)$ 时,$f'(x)=\sin x+x\cos x+2x=\sin x+x+x\cos x+x=(\sin x+x)+x(\cos x+1)>0$.

所以当 $x\geqslant 0$ 时,$f'(x)\geqslant 0$,则知函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上为增函数.

由 $a\sin a+a^2>(2b)^2+2b\sin 2b$,可得 $f(a)>f(2b)$.又函数 $f(x)$ 为偶函数,所以 $f(|a|)\geqslant f(|2b|)$,可得 $|a|>|2b|$.

故选择答案:C.

**点评**:在解决此类三角函数问题时,经常要通过三角恒等变换,利用一些相关的关系加以变形,从而寻找问题的同型,实现地位同等策略同构函数的目的,进而借助函数的基本性质来比较大小.

## 4 不等式证明

三角函数中的不等式证明问题,有时也可以借助代数关系式的结构特征,寻找共性,同构函数,通过函数的基本性质,从函数的思维视角来解决.

**例4** 在锐角三角形 $ABC$ 中,$A,B,C$ 是该三角形的三个内角,试证明:$\sin A\sin B\sin C>\sin A+\sin B+\sin C-2$.

**分析**:结合题目所要证明的三角不等式,以其中一个内角的正弦值为主元进行恒等变形,通过同构函数,利用锐角三角形各内角的正弦值的取值情况来确定一次函数的单调性,并结合对应的函数值,巧妙转化思维,综合利用函数的单调性来证明对应的三角不等式问题.

**证明**:要证 $\sin A\sin B\sin C>\sin A+\sin B+\sin C-2$,即证 $(\sin A\sin B-1)\sin C-(\sin A+\sin B)+2>0$.

同构函数 $f(x)=(\sin A\sin B-1)x-(\sin A+\sin B)+2$,$x\in(0,1)$.

而 $f(1)=\sin A\sin B-1-(\sin A+\sin B)+2=(1-\sin A)(1-\sin B)>0$(这里 $0<\sin A<1$,$0<\sin B<1$).

结合 $\sin A\sin B-1<0$,可知函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减.

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上恒有 $f(x)>f(1)>0$,则有 $f(\sin C)>0$.

因此 $f(\sin C)=(\sin A\sin B-1)\sin C-(\sin A+\sin B)+2>0$.

变形转化,可得 $\sin A\sin B\sin C>\sin A+\sin B+\sin C-2$ 成立,不等式得证.

**点评**:在解决以上三角不等式的证明问题时,如果没有头绪或无从下手,可以合理改变解题方向,通过题目的条件或结论的分析与考查,合理拓展思维,借助主元法等其他方法加以巧妙变形与转化,同构出与问题有关的基本初等函数,利用相应函数的相关知识来寻找与转化解决问题的方法与途径,实现问题的巧妙破解.

在破解一些三角函数的相关问题时,关键是抓住题目中三角函数关系式的结构特征,慧眼识别与寻找同型或共性,特别是结合三角恒等变形,巧妙抽象,合理同构函数,利用共性,将一些不熟知的三角函数问题转化为与之相关的其他基本初等函数问题来分析与处理,不断增强创新意识、同构意识等,提升创新应用能力,拓展思维,形成数学能力,培养数学核心素养.

**参考文献:**

[1]孟美金.寻找同型,同构函数,利用共性[J].高中数理化,2022(15):48-49.

[2]韩文美.巧借导数法 妙解三角题[J].教学考试,2021(2):27-29.

[3]张琳琳.函数巧同构 导数妙应用[J].中学数学,2022(19):55-56.