

解答圆锥曲线离心率问题常用的方法分析

肖毅(江西省吉安市遂川县燕山中学 343900)

【摘要】圆锥曲线的相关问题中,离心率是一个基础但又重要的考点,除了在选择、填空题中有所涉及,更是解答题中的必考问题.而看似简单的问题,学生在实际解答中,效果并不理想.为帮助学生全面掌握离心率问题的解题方法,本文总结常用的几种解题方法,以提升学生的解题效率.

【关键词】高中数学;圆锥曲线;离心率

离心率是圆锥曲线试题中的必考问题.在实际的问题中,在面对不同的题型时,也有不同的解题方法.为帮助学生更加全面的掌握离心率问题的解题思路,本文结合相关问题,分析常用解题方法,以提升学生解题效率.

1 基础定理

圆锥曲线中,其离心率 $e = \frac{c}{a}$,并且椭圆中存在 $b^2 + c^2 = a^2$ 、双曲线中存在 $a^2 - b^2 = c^2$ 等关系.因此,在实际解题中,便可以根据题目信息求出 a 、 b 和 c 的值或是存在的关系,便可以得到离心率 $e = \frac{c}{a}$.

例1 过双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 左顶点 A 作斜率为 1 的直线 l , l 与双曲线两条渐近线分别相交于 B, C , 且 $|AB| = |BC|$, 求双曲线的离心率.

解析 由 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$,

可得, $a = 1$,

则 $A(-1, 0)$, 直线 l 方程为 $y = x + 1$,

则直线与渐近线 $y = -bx$ 和 $y = bx$ 交点分别为

$B\left(-\frac{1}{b+1}, \frac{b}{b+1}\right), C\left(\frac{1}{b-1}, \frac{b}{b-1}\right)$,

因为 $|AB| = |BC|$, 可得 $b^2 = 9$,

则 $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10}$,

所以 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{10}$, 故双曲线离心率为 $\sqrt{10}$.

点评 这类问题相对而言,难度不大,在解题中,首先根据题意分别求得 a, b 的值,而后根据 $a^2 - b^2 = c^2$, 便可得 c 和 e 的值.

2 定义法

圆锥曲线具有诸多定义,在解答离心率相关问题时,可以借助圆锥曲线定义进行解答.在解题中,根据第一定义,得出 a, b, c 之间的关系式;根据第二定义,明确曲线上的点到准线的距离,便可得到离心率.

例2 F_1, F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的两个焦点,若双曲线上存在点 A , 使 $\angle F_1 A F_2 = 90^\circ$, 且 $|AF_1| = 3|AF_2|$, 则双曲线的离心率为()

(A) $\frac{\sqrt{5}}{2}$. (B) $\frac{\sqrt{10}}{2}$. (C) $\frac{\sqrt{15}}{2}$. (D) $\sqrt{5}$.

解析 设 $|AF_2| = t, |AF_1| = 3t (t > 0)$, 由双曲线定义 X 有: $2a = |AF_1| - |AF_2| = 2t$, $2c = \sqrt{|AF_1|^2 + |AF_2|^2} = \sqrt{10}t$,

则双曲线离心率 $e = \frac{\sqrt{10}}{2}$, 故正确选项为(B).

点评 本题主要考查学生对圆锥曲线定义的运用,即由题目中给出的 $|AF_1| = 3|AF_2|$, 联系双曲线定义:动点到两个焦点的距离之差为定值,则有 $|AF_1| - |AF_2| = 2a$, 而后可以建立关于 a, c 之间的关系式,进而得到双曲线离心率.

3 几何法

在圆锥曲线离心率的问题中,由许多问题会与几何问题进行结合.在面对这类问题时,学生便可以借助相关图象的性质,建立起关系式,进行解答.如此可以避免复杂的计算,从而提高学生的解题效率.

例3 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 左顶点和右焦点分别为 A, F 两点,过点 F 向双曲线的一条渐近线引垂线 l , 与 y 轴交于点 B , 以线段 AF 为直径的圆过点 B , 求 C 的离心率.

解析 根据题意,画出如图 1 所示的示意图.

设直线 l 与渐近线交于点 E , 因为以 AF 为直径的圆过点 B , 所以 $AB \perp BF$, 则有 $AB \parallel OE$. 因此, $\tan \angle BAO = \tan \angle EOF$, 即 $\frac{|OB|}{|OA|} = \frac{|EF|}{|OE|}$,

其中 $|EF| = b, |OE| = \sqrt{|OF|^2 - |EF|^2} =$

$$\sqrt{c^2 - b^2} = a,$$

所以 $|OB| = b$.

因为 $\angle BAO = \angle EOF$, $\angle ABO = \angle AFB$,

所以 $\triangle OAB \sim \triangle OFB$,

所以 $OB^2 = OA \cdot OF$, 即 $b^2 = ac$,

于是 $c^2 - a^2 = ac$, 即 $e^2 - e - 1 = 0$.

$$\text{解得 } e = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

点评 解答本题中,重点在于通过题目中给出的“以线段 AF 为直径的圆过点 B ”这一信息,得出 $\angle ABF = 90^\circ$,从而进一步得到 $\triangle OAB \sim \triangle OFB$,借助这一几何关系,可得到关于 a, b, c 的代数关系式,进而得到离心率 e .

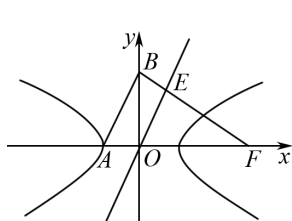


图 1

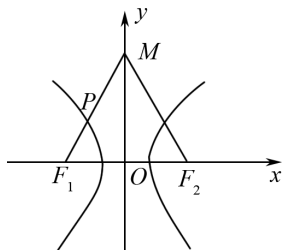


图 2

4 齐次式法

齐次式法是通过构建齐次式来解答圆锥曲线离心率问题的方法.在根据题目信息,难以计算出 a, c 的值时,此时便可以根据题目信息,借助 a, b, c 之间的关系,构造关于 a, c 的齐次式,而后通过解方程,得到离心率 e .

例 4 已知 F_1, F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的两个焦点,以线段 F_1F_2 为边作正三角形 MF_1F_2 ,若 MF_1 的中点在双曲线上,求双曲线的离心率.

解析 结合题意,绘制如图 2 所示的图形,

设 $|OF_1| = c$, MF_1 中点为 P ,

点 P 横坐标为 $-\frac{c}{2}$,

所以 $|PF_1| = \frac{1}{2} |F_1F_2| = c$,

由焦半径公式得 $|PF_1| = -2x_p - a$,

所以 $c = -\frac{c}{a} \times \left(-\frac{c}{2}\right) - a$,

即 $e^2 - 2e - 2 = 0$,

解得 $e_1 = 1 + \sqrt{3}$, $e_2 = 1 - \sqrt{3}$ (舍去),

所以双曲线离心率为 $1 + \sqrt{3}$.

点评 解答本题时,通过双曲线方程及焦半径公式建立关于 a, c 的齐次式,而后根据式子结构,同时除以 a^2 ,便可得到关于 e 的一元二次方程,便可得到答案.

5 方程法

一些离心率问题中,会出现直线等元素,而此可以将圆锥曲线与直线方程进行联立,而后结合一元二次方程判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 或韦达定理,建立关于 a, c 的方程,而后通过解方程得到 e .

例 5 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 渐近线与抛物线 $y = x^2 + 1$ 相切,求双曲线的离心率.

解析 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$,

则其渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$,

将 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 代入 $y = x^2 + 1$,

可得 $x^2 + 1 \pm \frac{b}{a}x = 0$,

因为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 和抛物线 $y = x^2 + 1$ 相切,

则 $x^2 + 1 \pm \frac{b}{a}x = 0$ 仅有一个实数根,

即 $\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 4 = 0$,

整理得 $\frac{c^2 - a^2}{a^2} = 4$, 即 $\frac{c^2}{a^2} = 5$,

即 $e^2 = 5$, 则 $e = \sqrt{5}$,

因此,双曲线的离心率 $e = \sqrt{5}$.

点评 在解答本题中,首先需要得到双曲线的渐近方程,然后将其与抛物线方程联立,得到关于 x 的一元二次方程,而后使 $\Delta = 0$,得到关于 e 的方程,便可解答问题.

6 结语

综上所述,本文总结了解答圆锥曲线中离心率问题的常用方法.在日常学习中,需要学生夯实相关基础知识,熟练掌握各种方法,结合题意选择合适的方法解答问题.

参考文献:

- [1] 袁晓光. 求解圆锥曲线离心率问题的两种思路[J]. 语数外学习(高中版中旬), 2023(02): 52.
- [2] 梁启浩. 用几何法速解离心率试题[J]. 中学生理科应试, 2022(12): 12-14.
- [3] 石翠娥. 圆锥曲线离心率求解策略[J]. 中学教学参考, 2023(05): 23-25.