回归教材，发散思维，链接高考

——基于一道教材习题的探究

■郭方炜

高中数学教材中的例(习)题，是对应数学基础知识的综合交汇与创新应用。回归教材，挖掘教材，活用教材，合理总结，探究应用，为数学问题的深入提升与拓展提供更加丰富的内涵与背景。

一、源于教材

题目 (人教版高一必修第一册)比较下列三个值的大小：

$\log_2 3,\log_3 4,\log_4 5$。

此类问题涉及不同底的对数式的比较大小，简捷朴实，同时蕴含着丰富的数学思想，对同学们的理性思维素养要求较高，可以很好考查数学运算、逻辑推理等核心素养，以及发展思维、探究能力等。

二、解法探究

方法 1:利用对数函数的图像

解:设函数 $y=\log_x(x+1)$，则 $y=\log_x(x+1)=\dfrac{\lg(x+1)}{\lg x}$。如图 1，函数 $y=\lg(x+1)$的图像在 $y=\lg x$ 图像的上方，且随着 x 的增大，两条曲线越来越接近，这说明随着 x 的增大，两个函数的函数值越来越接近。

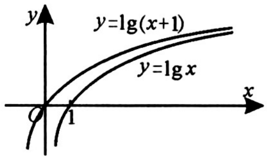

图 1

当 $\lg(x+1)>\lg x>0$ 时，随着 x 的增大，比值$\dfrac{\lg(x+1)}{\lg x}$越来越小，且趋近于 1。因为 $\log_x(x+1)=\dfrac{\lg(x+1)}{\lg x}$，所以 $y=\log_x(x+1)$是减函数，所以 $\log_2 3>\log_3 4>\log_4 5$。

方法 2:利用对数函数的性质

解:由于随着 x 的增大，函数 $f(x)=\lg x$ 的增长速度越来越慢，所以 $\lg 3-\lg 2>\lg 4-\lg 3>\lg 5-\lg 4>0$，所以 $\lg 3>\lg 2>0$，所以$\dfrac{1}{\lg 2}>\dfrac{1}{\lg 3}>0$。结合不等式的性质得$\dfrac{\lg 3-\lg 2}{\lg 2}>\dfrac{\lg 4-\lg 3}{\lg 3}>0$，即$\dfrac{\lg 3}{\lg 2}>\dfrac{\lg 4}{\lg 3}$，也即 $\log_2 3>\log_3 4$。同理可得，$\log_3 4>\log_4 5$。

故 $\log_2 3>\log_3 4>\log_4 5$。

解后反思:通过构建函数，结合换底公式，利用对数函数的图像与性质进行直观分析。在实际解答时，由于草图的不精确或对函数性质分析不准确，会导致偏差，造成错误。

方法 3:作差比较

解:由 $\log_2 3-\log_3 4=\dfrac{\lg 3}{\lg 2}-\dfrac{\lg 4}{\lg 3}=\dfrac{\lg^2 3-\lg 2\lg 4}{\lg 2\lg 3}$，结合基本不等式得 $\lg 2\lg 4<\left(\dfrac{\lg 2+\lg 4}{2}\right)^2=\left(\dfrac{\lg 8}{2}\right)^2=\lg^2\sqrt{8}<\lg^2 3$，所以 $\log_2 3-\log_3 4=\dfrac{\lg^2 3-\lg 2\lg 4}{\lg 2\lg 3}>0$，所以 $\log_2 3>\log_3 4$。同理可得，$\log_3 4>\log_4 5$。

故 $\log_2 3>\log_3 4>\log_4 5$。

方法 4:作商比较

解:由 $\dfrac{\log_2 3}{\log_3 4}=\dfrac{\lg 3\lg 3}{\lg 2\lg 4}=\dfrac{6\lg 3\lg 3}{6\lg 2\lg 4}=\dfrac{\lg 9\lg 27}{\lg 8\lg 16}>1$，可得 $\log_2 3>\log_3 4$。同理可得，$\log_3 4>\log_4 5$。故 $\log_2 3>\log_3 4>\log_4 5$。

解后反思:比较法是最常用的方法之一。涉及对数式的比较大小问题，往往借助换底公式，利用基本不等式加以放缩重构，再结合函数的性质来分析与处理。

方法 5:利用中间值

解:因为 $\log_2 3=\log_2\sqrt{9}>\log_2\sqrt{8}=\dfrac{3}{2}$，又 $\log_3 4=\log_3\sqrt{16}<\log_3\sqrt{27}=\dfrac{3}{2}$，所以 $\log_2 3>\log_3 4$。

因为 $\log_3 4=\log_3\sqrt[5]{4^5}=\log_3\sqrt[5]{1\,024}>$

$\log_3\sqrt[5]{729}=\log_3\sqrt[5]{3^6}=\frac{6}{5}$，$\log_4 5=\log_4\sqrt[5]{5^5}=\log_4\sqrt[5]{3\ 125}<\log_4\sqrt[5]{4\ 097}=\log_4\sqrt[5]{4^6}=\frac{6}{5}$，所以 $\log_3 4>\log_4 5$。

故 $\log_2 3>\log_3 4>\log_4 5$。

解后反思：根据一些特殊值0，1等进行比较大小，是破解此类问题比较常用的一种方法。

方法6：利用不等式的性质

解：当 $n>1$ 且 $n\in\mathbf{N}$ 时，结合基本不等式得 $\lg n\lg(n+2)<\left[\frac{\lg n+\lg(n+2)}{2}\right]^2=\left[\frac{\lg(n^2+2n)}{2}\right]^2<\left[\frac{\lg(n^2+2n+1)}{2}\right]^2=\lg^2(n+1)$，即 $\lg n\lg(n+2)<\lg^2(n+1)$，整理得 $\frac{\lg(n+1)}{\lg n}>\frac{\lg(n+2)}{\lg(n+1)}$，即 $\log_n(n+1)>\log_{(n+1)}(n+2)$。分别取 $n=2$ 和 $n=3$，可得 $\log_2 3>\log_3 4>\log_4 5$。

方法7：利用经典不等式

解：由 $\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$（也叫糖水不等式，其中 $b>a>0,m>0$），可得 $\frac{b}{a}>\frac{b+m}{a+m}$，则 $\log_2 3=\frac{\lg 3}{\lg 2}>\frac{\lg 3+\lg\frac{3}{2}}{\lg 2+\lg\frac{3}{2}}=\frac{\lg\frac{9}{2}}{\lg 3}>\frac{\lg 4}{\lg 3}=\log_3 4$，

$\log_3 4=\frac{\lg 4}{\lg 3}>\frac{\lg 4+\lg\frac{4}{3}}{\lg 3+\lg\frac{4}{3}}=\frac{\lg\frac{16}{3}}{\lg 4}>\frac{\lg 5}{\lg 4}=\log_4 5$。故 $\log_2 3>\log_3 4>\log_4 5$。

解后反思：根据所比较的对数式的结构特征，合理抽象与概括，借助经典不等式进行变形与放缩，从而确定大小关系。

三、链接高考

以对数式为背景命题的比较大小问题，在近几年高考中都有其熟悉的面孔与应用。

1.（2022年高考全国卷）已知 $9^m=10$，$a=10^m-11$，$b=8^m-9$，则（　　）。

A. $a>0>b$　　B. $a>b>0$

C. $b>a>0$　　D. $b>0>a$

解：由 $9^m=10$，可得 $m=\log_9 10>\log_9 9=1$。利用基本不等式得 $\lg 9\lg 11<\left(\frac{\lg 9+\lg 11}{2}\right)^2=\left(\frac{\lg 99}{2}\right)^2<\left(\frac{\lg 100}{2}\right)^2=(\lg 10)^2$，所以 $\frac{\lg 10}{\lg 9}>\frac{\lg 11}{\lg 10}$，即 $m=\log_9 10=\frac{\lg 10}{\lg 9}>\frac{\lg 11}{\lg 10}=\lg 11$，所以 $a=10^m-11>10^{\lg 11}-11=0$。

利用基本不等式得 $\lg 8\lg 10<\left(\frac{\lg 8+\lg 10}{2}\right)^2=\left(\frac{\lg 80}{2}\right)^2<\left(\frac{\lg 81}{2}\right)^2=(\lg 9)^2$，所以 $\frac{\lg 9}{\lg 8}>\frac{\lg 10}{\lg 9}$，即 $\log_8 9>\log_9 10=m$，所以 $b=8^m-9<8^{\log_8 9}-9=0$。

综上可得，$a>0>b$。应选A。

2.（2021年高考新课标卷）已知 $a=\log_5 2$，$b=\log_8 3$，$c=\frac{1}{2}$，则下列判断正确的是（　　）。

A. $c<b<a$　　B. $b<a<c$

C. $a<c<b$　　D. $a<b<c$

解：由 $a=\log_5 2=\log_5\sqrt{4}<\log_5\sqrt{5}=\frac{1}{2}=c$，$b=\log_8 3=\log_8\sqrt{9}>\log_8\sqrt{8}=\frac{1}{2}=c$，可得 $a<c<b$。应选C。

3.（2020年高考新课标卷）已知 $5^5<8^4$，$13^4<8^5$。设 $a=\log_5 3$，$b=\log_8 5$，$c=\log_{13} 8$，则（　　）。

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$

C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

解：由题设得 $a-b=\log_5 3-\log_8 5=\frac{\lg 3}{\lg 5}-\frac{\lg 5}{\lg 8}=\frac{\lg 3\lg 8-\lg^2 5}{\lg 5\lg 8}<\frac{\left(\frac{\lg 3+\lg 8}{2}\right)^2-\lg^2 5}{\lg 5\lg 8}<\frac{\left(\frac{\lg 25}{2}\right)^2-\lg^2 5}{\lg 5\lg 8}=0$，则 $a<b$。由 $5^5<8^4$，可得 $5\log_8 5<4$，则 $b=\log_8 5<\frac{4}{5}$。而 $13^4<8^5$，所以 $4<5\log_{13} 8$，所以 $c=\log_{13} 8>\frac{4}{5}$，可得 $c>b$。故 $c>b>a$。应选A。

作者单位：江苏省口岸中学

（责任编辑　郭正华）