学概括能力和语言表达能力，帮助学生养成良好的学习习惯，助力学生实现深度学习，发展数学学科核心素养. 同时，再次引导学生感受回归数学教材、研究高考题是实现高三数学复习减负增效的有效途径.

三 结语

当前在高三一轮复习过程中，“回归教材”往往被“填写知识清单”或“题海复习战术”所取代，而能够进行深度教材内容回归、梳理教材不同模块之间的联系，构建整个高中数学知识体系和学科思维方法体系的低耗高效复习模式并不多见.

我国现当代著名哲学家冯契将认识过程概括为从无知到有知，从知识到智慧的两次飞跃，即通过对知识的理解、运用与体认，使知识化为主体人的思维方式与言行准则，将认知的知识转化为求知、做事和为人的素养. 在高三的一轮复习中，应对教材中核心知识生成过程中蕴含的数学思想与方法进行激活、迁移、新情境运用，对重点例习题进行解题经验重组、变式训练、深度挖掘，应注重教材与真题的进阶式有机结合，抓住转识成智的良机，助力学生从知识型学习者向能力型学习者转变，促进学生思维能力与表达能力的提升，促使学科核心素养真正得以持续良性发展.

参考文献

[1]中华人民共和国教育部制定. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[M]. 北京：人民教育出版社，2020.
[2]教育部考试中心制定. 中国高考评价体系[M]. 北京：人民教育出版社，2019.
[3]花奎，张晓飞. 解题反思孕“念头”回归教材寻“源头”[J]. 数学通报，2021，60(8)：32－36，40.

“指对混搭函数不等式的证明”教学设计与思考

湖北省武汉市黄陂区第一中学盘龙校区 (430312) 卢 珍 李红春

1. 问题提出

函数导数综合问题是高考的热点和难点，不少高三教师面对这块内容的复习常常老生常谈，缺乏自己深入的见解，课后再辅以“题海战术”，展现的是大题量，快节奏，机械重复的教学形态，因此学生对所学的内容兴趣不高，解题停留于模仿，对问题的本源不明，解题无序，推论无理. 为了提升教师的思想认识，不断优化教学行为，前不久，笔者执教了一节题为《指对混搭函数不等式的证明》的展示课，获得了听课老师的充分好评. 本文将这节课的教学设计和教学思考呈现出来，供分享.

2. 教学设计展示

2.1 教学目标

(1) 能从“阶”的角度分析分式型函数的极值；

(2) 体会“分而治之”法解决问题的要领，并能用它证明一些常见指对混搭函数不等式；

(3) 更加深刻体会到数学学习中“重视基础，回归基本”的价值.

2.2 教学重难点

教学重点：用“分而治之”法证明指对混搭函数不等式.

教学难点：灵活对函数不等式进行变形.

2.3 教学过程

本节课为借班授课，授课班级为某省级示范学校学生，学生基础较好，课前老师已将如下问题 1 让学生提前进行了思考.

问题 1 (2020 年山东卷改编) 求证 $2e^{x-1}-\ln x>1+\ln 2$.

(1) 问题铺垫

课堂开始，教师巡查课堂，找到了三种不同的解法，并让学生代表用投影仪展示出来.

解法 1：设 $f(x)=2e^{x-1}-\ln x$，则 $f'(x)=2e^{x-1}-\frac{1}{x}$，显然 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增，而 $f'(\frac{1}{2})=\frac{2}{\sqrt{e}}-2<0$，$f'(1)=1>0$，则存在 $x_0\in(\frac{1}{2},1)$ 使得 $f'(x_0)=0$，此时有 $2e^{x_0-1}=\frac{1}{x_0}$，即 $\ln 2+x_0-1=-\ln x_0$. 当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 递减；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增；于是 $f(x)\geqslant f(x_0)=2e^{x_0-1}-\ln x_0=\frac{1}{x_0}+(x_0-1+\ln 2)=\frac{1}{x_0}+x_0+\ln 2-1>2+\ln 2-1=1+\ln 2$.

解法 2:原不等式变形为 $e^{\ln2+x-1}-(\ln2+x-1)-1+x-\ln x-1>0$,故只需证$[e^{\ln2+x-1}-(\ln2+x-1)-1]+(e^{\ln x}-\ln x-1)>0$. 设 $g(x)=e^{x}-x-1$,显然 $g(x)\geqslant0$ 在 R 上恒成立,于是 $g(\ln2+x-1)+g(\ln x)\geqslant0$,而等号取不到,故 $g(\ln2+x-1)+g(\ln x)>0$,即$[e^{\ln2+x-1}-(\ln2+x-1)-1]+(e^{\ln x}-\ln x-1)>0$,故原不等式成立.

解法 3:原不等式等价为 $2e^{x-1}-1>\ln(2x)$,由切线不等式 $e^{x}\geqslant x+1$ 知 $e^{x-1}\geqslant x$,于是 $2e^{x-1}\geqslant2x$,$\ln x\leqslant x-1$,又由 $\ln x\leqslant x-1$ 得 $\ln(2x)\leqslant2x-1$,于是 $2e^{x-1}-1\geqslant2x-1\geqslant\ln(2x)$,两处取等条件不一致,故 $2e^{x-1}-1>\ln(2x)$,原不等式成立.

教师:解法 1 是将函数不等式 $f(x)>g(x)$ 的证明等价为 $(f(x)-g(x))_{\min}>0$ 来处理,进而将问题转化求函数的最值,这是一种常见处理问题的方法;解法 2 借助同构,利用熟悉函数的有界性求解,过程简单;解法 3 借助熟悉的结论 $e^{x}\geqslant x+1$ 和 $\ln x\leqslant x-1$,直接构建不等关系,直观简捷,体现着较高的数学素养. 下面将上述试题变式成如下问题,让学生再思考:

问题 2　求证:$2e^{x-2}>x\ln x$.

设计意图:通过 2020 年山东高考改编试题的引入,集思广益,总结回顾了处理这类问题学生接触过的三种基本方法. 借助问题变式,学生思维受挫,激发学生的求知欲.

(2) 观察发现

观察以下六个函数的图像(如图 1),回答问题.

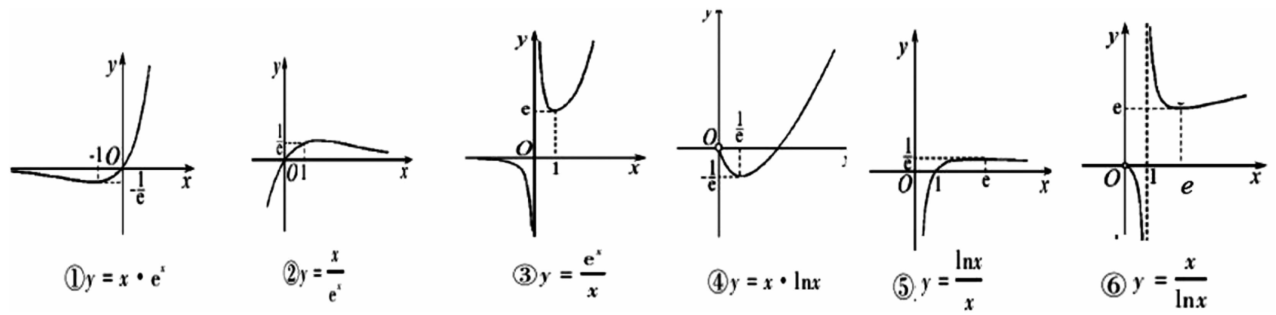

图 1

问题 3　数学中,若依据函数值的“变化速度”,可将函数定位为不同的“阶”,“幂”“指“对”函数就是分属不同的“阶”,如“幂函数”相对于“对数函数”是高阶函数,而“幂数函数”相对于“指数函数”却是低阶函数. 函数 $\frac{e^{x}}{x}$ 属于如“$\frac{\text{高阶}}{\text{低阶}}$”型的函数;函数 $\frac{\ln x}{x}$ 属于“$\frac{\text{低阶}}{\text{高阶}}$”型的函数. 请观察函数②③⑤⑥,从“阶”的角度分析,你能发现:“$\frac{\text{高阶}}{\text{低阶}}$”型的函数有极________值,“$\frac{\text{低阶}}{\text{高阶}}$”型的函数有极________值.

问题 4　根据问题 3 的结论,结合下列函数的特点,猜想下列函数是否有最值,有怎样的最值,并求导验证你的猜想:

(1)$f(x)=\frac{e^{x-1}}{x}(x>0)$;(2)$f(x)=\frac{2e^{x+1}}{x^{3}}(x>0)$;(3)$f(x)=\frac{\ln x+1}{x^{2}}$;(4)$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{e^{x}}$.

答案:(1)(2) 两个函数属于$\frac{\text{高阶}}{\text{低阶}}$,有最小值,(3)(4) 属于$\frac{\text{低阶}}{\text{高阶}}$有最大值.

学生分成四个小组,分别验算猜想,此时教师用几何画板展示四个函数图像(如图 2):

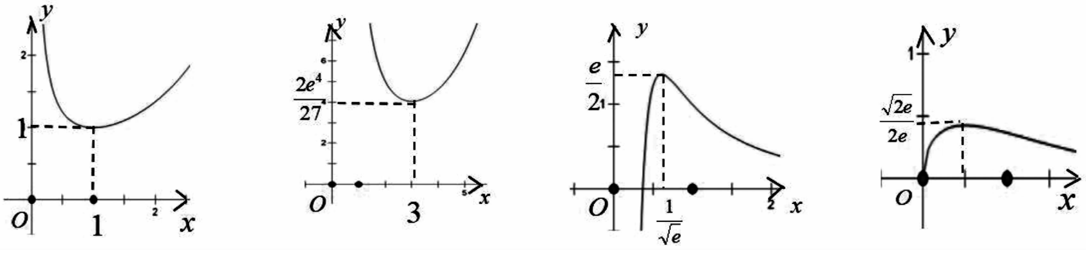

图 2

设计意图:从学生较为熟悉的“六大函数”图像入手,引导其从“阶”的角度归纳出“高阶比低阶”和“低阶比高阶”函数取极值的规律,再借助一些具体函数,让学生经历分析猜想,求导验证,直观感受,体会规律存在的一般性,为后续求解问题做好铺垫.

(3) 数学应用

教师:数学问题的求解一般遵循等价转化,如将$f(x)>0 \Leftrightarrow f(x)_{\min}>0$;利用充分性证明问题也是一种常见的方法,如将不等式$f(x)>0$先变形为$m(x)>n(x)$,再证明$m(x)_{\min}>n(x)_{\max}$. 利用这一思路,我们再来看问题 2.

思路分析:要证左边大于右边,则可考虑左边函数的最小值大于右边函数的最大值,给定的不等式左边函数没有最小值,右边函数也没有最大值,所以可以考虑让左右两边都有最值,左边要有最小值,可借助“高阶函数”除以“低阶函数”来实现,右边要有最大值,则通过“低阶函数”除以“高阶函数”实现,于是先在原不等式两边除以x得$\dfrac{2e^{x-2}}{x}>\ln x$,此时左边为“$\dfrac{\text{高阶}}{\text{低阶}}$”形式,有极小值,即为最小值,但右边没有最大,于是再继续除以x得$\dfrac{2e^{x-2}}{x^2}>\dfrac{\ln x}{x}$,此时左边函数有极小值,右边函数有极大值. 下面只需具体求出左右两边函数的相应最值即可.

解:$2e^{x-2}>x\ln x \Leftrightarrow \dfrac{2e^{x-2}}{x^2}>\dfrac{\ln x}{x}$. 设$m(x)=\dfrac{2e^{x-2}}{x^2}$, $n(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, 则$m'(x)=\dfrac{2e^{x-2}(x-2)}{x^3}$, $n'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$. 由$x\in(0,2)$时,$m(x)$递减,当$x\in(2,+\infty)$时,$m(x)$递增,则$m(x)_{\min}=m(2)=\dfrac{1}{2}$,由$x\in(0,e)$时,$n(x)$递增,当$x\in(e,+\infty)$时,$n(x)$递减,则$n(x)_{\max}=n(e)=\dfrac{1}{e}$. 由$\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{e}$知$m(x)_{\min}>n(x)_{\max}$,即$\dfrac{2e^{x-2}}{x^2}>\dfrac{\ln x}{x}$,故$2e^{x-2}>x\ln x$.

设计意图:通过对开头变式问题的解法分析,让学生充分领略到“分而治之”法处理问题的简便,借助思维过程的展示,让学生能知其然,更知其所以然.

(4) 数学实践

问题 5 观察下列待证不等式,若用“分而治之法”证明,该如何变形,说出你的理由.

(1)$\ln x<\dfrac{2}{e^2}\cdot\dfrac{e^x}{x}$; (2)$e^x-x\ln x+x>0$; (3)$4e^{x-2}>x(1+\ln x)$.

答案:(1)$\ln x<\dfrac{2}{e^2}\cdot\dfrac{e^x}{x} \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x}<\dfrac{2}{e^2}\dfrac{e^x}{x^2}$;

(2)$e^x-x\ln x+x>0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x}{x^2}>\dfrac{\ln x-1}{x}$;

(3)$4e^{x-2}>x(1+\ln x) \Leftrightarrow \dfrac{4e^{x-2}}{x^2}>\dfrac{1+\ln x}{x}$.

问题 6 下面是一道高考真题,请研读解答过程,分析用到的知识和方法,谈谈对你有哪些启发?

(2014 年高考简编) 求证:$e^x\ln x+\dfrac{2e^{x-1}}{x}>1$.

证明:$e^x\ln x+\dfrac{2e^{x-1}}{x}>1 \Leftrightarrow x\ln x+\dfrac{2}{e}>\dfrac{x}{e^x}$.

设$m(x)=x\ln x+\dfrac{2}{e}$, $n(x)=\dfrac{x}{e^x}$, $(x>0)$,则$m'(x)=\ln x+1$, $n'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$. 当$x\in(0,\dfrac{1}{e})$时,$m'(x)<0$, $m(x)$递减;当$x\in(\dfrac{1}{e},+\infty)$时,$m'(x)>0$, $m(x)$递增,于是$m(x)_{\min}=m(\dfrac{1}{e})=\dfrac{1}{e}$.

当$x\in(0,1)$时,$n'(x)>0$, $n(x)$递增;当$x\in(1,+\infty)$时,$n'(x)<0$, $n(x)$递减,于是$n(x)_{\max}=n(1)=\dfrac{1}{e}$;于是$m(x)\geqslant n(x)$,但取等条件不一致,故$m(x)>n(x)$.

本题采用的是“分而治之”法证明不等式,解答的关键是将原不等式变形为左右两边大家都熟悉的基本函数$y=x\ln x$和$y=\dfrac{x}{e^x}$,由函数$y=x\ln x$有最小值$-\dfrac{1}{e}$,函数$y=\dfrac{x}{e^x}$有最大值$\dfrac{1}{e}$直接得到结果. 这道题的解答启发我们在数学的学习中一定要重视基础,回归基本.

设计意图:分而治之法解题的重点不在计算,而在于学生动笔时,能准确判断如何将函数式分开,以及不等式两边变形的度. 问题 5 对学生的考查力求“好钢用在刀刃上”. 问题 6 是高考压轴题,让学生在课堂有限时间完成,难度颇大,设计为“阅读与反思”,更接地气. 高考试题具有导向性,学习考试中心给出的参考答案就是在和命题专家直接对话,领悟试题解法背后的意图,对于学生改进学习方法很有意义.

(5) 数学创新

问题 7 结合本节课学习的内容,立足函数的

阶,从函数最值的角度出发,能否命制一道“指对混搭函数不等式”的证明题,并和大家分享你的命题思路.

设计意图: 这一课堂环节的设置具有开放性,旨在培养学生的创新思维,借助从解题到命题的引导,将学生的思维引向深入,让学生不但会做别人命的题,更要善于自己提出问题.

(6) 课堂小结及课后巩固(略)

3 教学反思

围绕这节课的教学设计,结合评委的意见,笔者觉得有如下几个亮点可供探讨.

3.1 适当铺垫,展现数学课堂教学的智慧

裴光亚老师曾经说过:教学艺术的基本特征是错位,为了抵达目标而偏离目标,其实不是偏离,而是营造目标赖以生存的环境,越是重要的东西,越是要隐藏起来,隐藏是为了展现诱惑[1]. 当学生们为课前给出的问题能“一题多解”,自我感觉良好时,老师接下来抛出的问题变式让他们一筹莫展,进退两难,在这样的情绪背景下,学生学习新方法的热情自然高涨.

3.2 用心设计,着力提升问题的针对性

问题是数学的心脏,本节课的难点在于引导学生对待证式进行合理变形,问题 5 设计为让学生观察待证不等式用“分而治之法”该如何去变形,重点考查学生变形方向的选择,显得独具匠心,如果设计为一般的证明题,求导计算的繁琐必将冲淡主题. 问题 7 的设置具有相当的开放性,直接指向考查学生的创新思维,引导学生去探究和发现.

3.3 优化学法,于润物细无声处指导

“授人以鱼不如授人以渔”,教师在传授学生知识的同时,更要教给学生科学的学习方法. 正如同教材,既蕴含了丰富的数学知识,更体现了研究问题的方法. 我们一直强调学习要重视基础,回归基本,这就需要从复杂的情境中看到基本元素,从几何中看到基本图形,从代数中看到基本公式,从三角中看到基本变换,从统计中看到基本模型. 如何做到这点,空洞的说教都不如让学生自己去体会. 学生研读了问题 6 的参考答案,发现作为高考的压轴难题,却根基于这些学生耳熟能详的“基本函数”,倘若自己对这些“基本函数”的特征性质掌握得足够熟练,自然不会盲目变形. 它带给学生的启示是:即使面对高考,夯实基础,回归基本绝不过时.

3.4 以身示范,教师树立了很好的榜样

《课程标准》中提出:要在数学教学中着力培养学生的创新精神和实践能力[2],优秀的教师是用教材而不是教教材. 特别是高三复习阶段,教师要善于对知识进行整合与重构,对一些内容要有自己的独到见解. 创新精神从何而来?教师首先要以身示范,成为学生心中乐于钻研问题的榜样;其次要留足时空,让学生放手去发现和创造.“分而治之”法求解指对混搭函数不等式的证明问题,平常解题中并不多见后,课堂上教师敢于选择这节内容来教学,源于教师的不断学习与钻研. 在问题 7 的命题环节,更是留足时空,让学生将思维从课内引向课外,不断去探索和发现.

参考文献

[1]裴光亚,教学艺术的基本特征是错位[J]. 中学数学教学参考,2016(25):1

[2]中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版)[M]. 北京:人民教育出版社,2018.

明导向知算理　提升关键能力

——例析二轮复习中数学核心素养的发展

江苏省海安高级中学 (226600) 徐卫华

高中数学的六大学科核心素养是高中数学课程体系与目标的一个集中体现,是具有数学基本特征的思维品质、关键能力以及情感、态度与价值观的综合体现,也是每年高考命题的一个主要方向. 在二轮数学复习备考中,教师应该基于课堂,深耕课堂,合理构建学科教学观念与现代教学模式,突破传统教学方式的束缚与单一数学知识的局限,全面优化数学教学策略,促进学生的全面发展. 本文