江苏省仪征中学 2023-2024 学年度第二学期高三数学学科导学案

直线与圆锥曲线的综合问题

研制人：　刘义军　　　审核人：陈宏强

班级：______________ 姓名：______________ 学号：__________ 授课日期：

【考情分析】

综观近几年的新高考试题，客观题以考查圆锥曲线的方程与性质为主，解答题主要以双曲线、椭圆、抛物线为背景考查斜率及面积问题、方程求解及劣构性问题、定值问题、最值与范围问题等.

【真题感悟】

1.（多选）（2023 • 新高考Ⅱ卷）设 O 为坐标原点，直线 $y=-\sqrt{3}\left(x-1\right)$ 过抛物线 $C:y^2=2px\left(p>0\right)$ 的焦点，且与 C 交于 M，N 两点，l 为 C 的准线，则下列结论正确的有（　　）

A．$p=2$　　　　B．$MN=\frac{8}{3}$

C．以 MN 为直径的圆与 l 相切　　　　D．$\triangle OMN$ 为等腰三角形

2．(2022 • 浙江卷)已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点为 F，过 F 且斜率为 $\frac{b}{4a}$ 的直线交双曲线于点 $A\left(x_1,y_1\right)$，交双曲线的渐近线于点 $B\left(x_2,y_2\right)$，且 $x_1<0<x_2$．若 $FB=3FA$，则双曲线的离心率是________.

3．(2022 • 新高考Ⅱ卷)已知椭圆 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$，直线 l 与椭圆在第一象限交于 A，B 两点，与 x 轴、y 轴分别交于 M，N 两点，且 $MA=NB$，$MN=2\sqrt{3}$，则直线 l 的方程为__________________.

【典例导引】

例 1.（2023 • 河北石家庄一模）已知点 $P(4,3)$ 在双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 上，过 P 作 x 轴的平行线，分别交双曲线 C 的两条渐近线于 M，N 两点，且 $PM\cdot PN=4$.

（1）求双曲线 C 的方程；

（2）若直线 $l:y=kx+m$ 与双曲线 C 交于不同的两点 A,B，设直线 PA,PB 的斜率分别为 k_1,k_2，若 $k_1+k_2=1$，证明：直线 l 过定点.

例 2．（2023 • 全国乙卷）已知椭圆$C:\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率是$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，点$A\left(-2,0\right)$在$C$上．

（1）求C的方程；

（2）过点$\left(-2,3\right)$的直线交C于 P，Q 两点，直线 AP，AQ 与y轴的交点分别为 M，N，证明：线段MN的中点为定点．

例 3．（2023 • 全国甲卷）已知直线$x-2y+1=0$与抛物线$C:y^2=2px(p>0)$交于A,B两点，且$AB=4\sqrt{15}$．

（1）求p的值；

（2）设F为C的焦点，M，N为C上两点，且$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0$，求△$MFN$面积的最小值．

江苏省仪征中学 2023-2024 学年度第二学期高三数学学科作业

直线与圆锥曲线的综合问题

研制人：刘义军　　审核人：陈宏强

班级：__________ 姓名：__________ 学号：__________ 时长：60 分钟

1.（2023·广东佛山一模）已知椭圆 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的左焦点为 $F(-1,0)$，左、右顶点及上顶点分别记为 A，B，C，且 $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{CB}=1$．

（1）求椭圆 Γ 的方程.

（2）设过 F 的直线 PQ 交椭圆 Γ 于 P，Q 两点，若直线 PA，QA 与直线 l：$x+4=0$ 分别交于 M、N 两点，l 与 x 轴的交点为 K，则 $MK\cdot KN$ 是否为定值？若为定值，请求出该定值；若不为定值，请说明理由.

2.（2023 • 湖南邵阳一模）已知动圆 P 过点 $F_2(2,0)$，且与圆 $F_1:(x+2)^2+y^2=4$ 相外切，动圆圆心 P 的轨迹为 C .

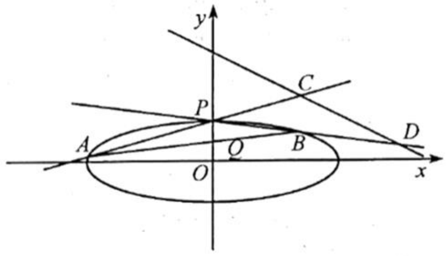
（1）求曲线 C 的轨迹方程；

（2）过点 $F_2(2,0)$ 的直线 l_1 与轨迹 C 交于 A，B 两点，设直线 $l:x=\frac{1}{2}$，点 $D(-1,0)$，直线 AD 交 l 于点 M，求证：直线 BM 过定点 $(1,0)$.

3．(2022 • 浙江卷)如图，已知椭圆 $\frac{x^2}{12}+y^2=1$．设 A，B 是椭圆上异于 $P(0,1)$ 的两点，且点 $Q(0,\frac{1}{2})$ 在线段 AB 上，直线 PA, PB 分别交直线 $y=-\frac{1}{2}x+3$ 于 C，D 两点．

（1）求点 P 到椭圆上点的距离的最大值；

（2）求 CD 长的最小值．



4．（2023·广东梅州一模）已知动圆 M 经过定点 $F_1\left(-\sqrt{3},0\right)$，且与圆 F_2：$\left(x-\sqrt{3}\right)^2+y^2=16$ 内切．

（1）求动圆圆心 M 的轨迹 C 的方程；

（2）设轨迹 C 与 x 轴从左到右的交点为点 A、B，P 为轨迹 C 上异于 A、B 的动点，设 PB 交直线 $x=4$ 于点 T，连结 AT，交轨迹 C 于点 Q．直线 AP，AQ 的斜率分别为 k_{AP}，k_{AQ}．

①求证：$k_{AP}\cdot k_{AQ}$ 为定值；

②证明：直线 PQ 经过 x 轴上的定点，并求出该定点的坐标．