"小专题,大容量"
——例谈小专题复习模式在高中数学二轮复习中的应用

俞小英
浙江省杭州市塘栖中学 311106

[摘 要] 复习是高三数学教学的主体,而二轮复习则是高三数学复习中的关键环节. 相对于一轮复习的重基础、讲知识、建体系而言,二轮复习的关键在于知识点再次深入,重难点寻求突破,思想方法交融升华. 而采用何种模式进行高三数学的二轮复习,是涉及数学复习的针对性和有效性的关键所在.
[关键词] 小专题;二轮复习;有效性

专题复习是高三二轮学科复习的常用模式,专题的合理设计和充分利用,对减轻学生负担、提高复习效率、突破知识难点、升华思维模式有着不可言喻的作用.因此,如何选择并确定专题、如何在课堂中用好专题、如何发挥专题的最大作用是本文探讨的主要内容. 笔者认为,利用小专题寻找小切口,在切口处慢慢深入,实现知识点的再次突破和思想方法的综合提升乃是"以小见大"之举.

如何选择小专题

专题复习在二轮复习中的应用是普遍的,然而很多二轮复习课堂在一轮复习的"广泛撒网"和"泛泛而谈"之后,显得有点"虚伪". 因为专题的不恰当定位和选择,使得课堂的专题复习没有针对性,而变成第二遍一轮复习,从而课堂的深度、难度、多维度都有所欠缺.笔者认为二轮小专题的定位在于以下几点:

1. 小专题的"小"

小专题的小可以理解为知识切口小. 寻找一个知识点,或者一两个知识点串,用典型的例题与练习逐步地深入而完善此知识点,就做到了小专题的以小见大. 如:笔者在二轮复习的数列模块中,针对常考的等差数列性质的综合应用设计了一组小专题复习题.

①已知数列$\{a_n\}$为等差数列,$a_8=1$,则$S_{15}=$________;

②已知数列$\{a_n\}$为等差数列,$a_8=1$,$a_{10}=12$,则$S_{17}=$________;

③已知数列$\{a_n\}$为等差数列,$a_8=1$,$S_{16}=0$,则S_n的最大值为________;

④已知数列$\{a_n\}$为等差数列,$a_2=9$,$a_8=1$,则使S_n取最大值的n为________;

⑤已知数列$\{a_n\}$为等差数列,$a_2=9$,$a_8=1$,则使$S_n>0$的最大值的n为________;

⑥已知数列$\{a_n\}$为等差数列,$a_1=7$,前n项和为S_n,当且仅当$n=8$时,S_n取得最大值,则d的取值范围为________.

以上题组所涉及的知识点就是等差数列中:当$m+n=p+q$时,$a_m+a_n=a_p+a_q$,然而这一知识点却是等差数列中的常考知识点,且对于我们普通高中的一般学生来说,在一轮复习时对这一性质已有所理解与掌握,但针对这一性质与求和公式的综合应用的灵活度还稍有欠缺. 这个小专题的讲解,直接以排比、递进的题组模式给出,学生在做完题组后对等差数列的上述性质会进一步巩固,并有深入理解. 这一性质体现了等差数列中项的前后对称性,在等差数列求和中可以利用这一性质灵活地实现S_n和a_n之间的切换.

2. 小专题的"专"

小专题的"专"是指专题设计必须有明确的指向性和针对性,可以针对某个知识点,也可以是某一思想方法,甚至可以是某种解题小技巧的应用. 如:笔者在二轮复习的解三角形模块中,针对"边角互化"这一方法设计了一个小专题.

(1)在$\triangle ABC$中,内角A,B,C的对边分别为a,b,c,且$2a\cos A=b\cos C+c\cos B$,

①求角A的大小;

②若$a=6$,$b+c=8$,求$\triangle ABC$的面积.

(2)在$\triangle ABC$中,内角A,B,C的对边分别为a,b,c,且$c\sin A=a\cos C$.

①求角C的大小;

②若$c=2$,则求$a+b$,ab,$S_{\triangle ABC}$,a^2+b^2的取值范围.

(3)在$\triangle ABC$中,设边a,b,c所对的角为A,B,C,且A,B,C都不是直角,$(bc-8)\cos A+ac\cos B=a^2-b^2$.

①若$b+c=5$,求b,c的值;

②若$a=\sqrt{5}$,求$\triangle ABC$面积的最大值.

以上三个题组的设计,主要让学生

作者简介:俞小英(1984-),本科学历,中学一级教师,杭州市教坛新秀、余杭区骨干教师,多年来一直担任高三数学教学工作.

体会解三角形中正弦、余弦定理的实质是反应三角形中边与角的相互关系. 因此，在解决此类问题时，基本思想就是实现边角互化，让题目条件只留下边或只留下角.

$2a\cos A=b\cos C+c\cos B$

$\because \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

$\therefore a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

$\therefore 2\sin A\cos A=\sin B\cos C+\sin C\cos B$

即 $\sin 2A=\sin(B+C)$

$\therefore \sin 2A=\sin A$

$\therefore 2\cos A=1$

$\therefore A=\frac{\pi}{3}$.

$2a\cos A=b\cos C+c\cos B$

$\Rightarrow 2a\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$\Rightarrow \frac{a(b^2+c^2-a^2)}{bc}=\frac{2a^2}{2a}$

$\Rightarrow \frac{b^2+c^2-a^2}{bc}=1$

$\Rightarrow \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow A=\frac{\pi}{3}$

以上两图分别为甲、乙两位同学对题1大条件的化简过程，显然两人分别用了正弦定理和余弦定理，甲选择留角，乙选择留边，通过两位同学的做法的比对，让学生自己体会两种方法的特点和实用性.笔者发现甲、乙两位同学在化简题2的题干条件时，还是习惯性地甲留角、乙留边，但此时乙发生了理解性的错误，他将a直接代替了$\sin A$的位置，这说明乙没有真正理解正弦定理角边互化的实质，通过此题，乙也尝试化边为角，体验了两种方法的区别与联系，通过题3对边角互化进行巩固.

3. 小专题的“新”

小专题的设计绝大多数针对典型的重难点问题、易错点问题等，但小专题的设计有时也要讲究“新”——角度的新颖、内容的更新、模式的创新等. 特别是角度的新颖，可以让学生从新的角度重新认识老问题，可以有更多思维的碰撞，促进学生对该专题所涉及的知识、思想、方法的深入掌握.

在二轮复习中，笔者在复习绝对值函数时设计了如下专题：

(1)若不等式$|x-2|+|x-1|\geqslant a$在$\mathbf{R}$上恒成立，则a的取值范围为________；

(2)若不等式$|2x-3|+|2x+2|>a+\frac{4}{a}$成立，则$a$的取值范围为________；

(3)若不等式$|2x-a|+|x-1|\geqslant 2$对任意$x\in\mathbf{R}$恒成立，则a的取值范围为____；

(4)若$f(x)=(x-a)(|x+a|+|x-3|)$是中心对称图形，则a的值为________；

(5)若$2x^2-(x-a)|x-a|-2\geqslant 0$对任意$x\in\mathbf{R}$恒成立，则实数$a$的最小值为____；

本专题重点是讲解绝对值函数的图像和性质，笔者用恒成立问题和图像对称问题进行设计，从而强化学生对绝对值函数的透彻理解.

如何用好小专题

1. 用在知识的突破上

有的知识点比较抽象，逻辑性较强，注定是学生难解的劫. 这样的知识点在一轮复习过后学生往往处于一知半解状态，似懂非懂，记住了定义与公式，掌握了一般题型，但由于对知识点没有深入系统的了解，只要题目一变形，学生就犯难. 这样的知识点就需要在二轮复习时通过“小专题”的模式进行强化突破.例如对于基本不等式的变形应用上，笔者通过以下题组组成小专题进行复习突破.

(1)已知正数x,y满足$x+2y=1$，求$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$得最小值；

(2)已知正数x,y满足$2x+y=xy$，求$2x+y$的最小值；

(3)已知正数x,y满足$x+2y=4$，求$\frac{y}{4x}+\frac{1}{y}$的最小值；

(4)已知$0<x<1$，求函数$y=\frac{1}{x}+\frac{2}{1-x}$的最小值；

(5)已知a,b为正实数，且$a+b=2$，则$\frac{a^2+2}{a}+\frac{b^2}{b+1}$的最小值为________.

题1是典型的巧用“1”的题型，在一轮复习的基础上学生基本能顺利解决.题2是题1的变形，大部分学生在一轮复习中也已掌握这种变形$\left(\frac{2x+y}{xy}=\frac{2}{y}+\frac{1}{x}=1\right)$，解决此题也没有问题. 题3形似题1和题2，大部分学生都会往巧用“1”的方向思考，然后会发现所求的式子在形式上和题1、题2是完全不同的，这个时候学生就犯难. 那么教师此时就可以从题1、题2出发进行知识点的突破讲解：关于此类型的基本不等式习题，除了巧用“1”的方法外，还有“消元法”“换元法”等多种常用方法. 如题1中，我们可以采用消元法：$x+2y=1$即为$y=\frac{1-x}{2}$，则此题可转化为$\frac{1}{x}+\frac{2}{1-x}=\frac{1+x}{x-x^2}$，然后换元$t=1+x$，则此题变为$\frac{t}{(t-1)-(t-1)^2}$，即为$\frac{t}{-t^2+3t-2}=\frac{1}{-\left(t+\frac{2}{t}\right)+3}$，这样此题就解决了.此时有学生认为这种方法没有代“1”的方法好.这种反应说明学生已经在思考这个知识点题型的一题多解问题，教师解释，刚才展示的消元法对于题1确实是杀鸡用牛刀了，但这种思想方法是我们高中阶段解决“二元问题”的基本方法，当遇到二元问题时，我们可以从这个角度思考.于是学生们得到启发，都尝试用消元法解决问题3：

$$y=2-\frac{x}{2},\quad \frac{y}{4x}+\frac{1}{y}=\frac{2-\frac{x}{2}}{4x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{8}$$

，后面再用代“1”法问题就解决了. 而题4和题5主要是想例谈“换元法”在基本不等式中的应用. 通过这样的小专题讲解，通过三种方法的对比与练习，学生对不能直接应用基本不等式求解的问题就掌握得比较成熟了.

2. 用在思维的升华上

奇函数是函数的重要性质，学生们通过一轮复习掌握了奇函数性质的代数表达式$f(-x)=-f(x)$和图像对称特征，但奇函数性质不单纯是这一知识点的考查，它也是一个工具，利用它可以解决很多化简、求值问题.笔者设计了一个奇函数性质应用的小专题，让学生体会奇函数性质的工具性和思维含量.

(1)利用奇函数的性质求值：已知函数$f(x)$是定义在实数集$\mathbf{R}$上的不恒为零的奇函数，且对任意的实数x都有$xf(x+1)=-(1+x)f(x)$，求$f\left(\frac{5}{2}\right)$的值.

解：若$x\neq 0$，则有$f(x+1)=-\frac{1+x}{x}f(x)$.

取$x=-\frac{1}{2}$，则有$f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

因为$f(x)$是奇函数，所以$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}\right)$，所以$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$，

所以$f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{5}{3}f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{5}{3}\cdot(-3)\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)=5f\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

(2)利用奇函数的性质研究函数的对称性：已知函数$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，且满足$f(x-4)=-f(x)$，且在区间$[0,2]$上是增函数，若方程$f(x)=m(m>0)$在区间$[-8,8]$上有四个不同的根x_1,x_2,x_3,x_4，则求$x_1+x_2+x_3+x_4$的值.

解：因为$f(x)$是奇函数，所以$f(x-4)=-f(4-x)$，又$f(x-4)=-f(x)$，

所以$f(4-x)=f(x)$，所以函数$f(x)$有对称轴$x=2$，且以8为周期. 又因为$f(x)$在$[0,2]$递增，因此$f(x)$在$[-8,8]$上的大致图像为：

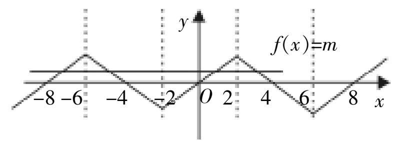

图1

不妨设$x_1<x_2<x_3<x_4$，由对称性可得：$x_1+x_2=-12$，$x_3+x_4=4$，所以$x_1+x_2+x_3+x_4=-8$.

(3)利用奇函数性质研究抽象函数问题：已知函数$y=f(x)$对任意的$x,y\in\mathbf{R}$均有$f(x)+f(y)=f(x+y)$，且当$x>0$时，$f(x)<0$，$f(1)=-\frac{2}{3}$. ①判断并证明$f(x)$在$\mathbf{R}$上的单调；②解关于a的不等式$f(a-3)+f(1-2a^2)<2$.

以上奇函数性质应用的小专题设计，有助于学生进一步提升对函数的奇偶性、单调性、周期性、对称性等函数性质的综合性认识，有助于学生在学习函数性质时不是纯粹地研究单一性质，而是关注整体性、相关性的探索. 这对综合性、整体性的全方位思维模式训练，对于学生数学思维的升华有着不可忽视的作用.

3. 用在技巧的提升上

数学的综合能力提升不仅要注重知识体系的完善、思想方法的提炼、思维能力的升华，也要注重解题技巧的培养. 特别是在二轮复习中，我们应该有意识地在复习课中设计一些跟技巧性相关的小专题，让学生学以致用，在解决一些中高档、高档的小题时有着快、准的作用. 以下是笔者设计的一个关于极化恒等式的小专题：

(1)在$\triangle ABC$中，M是BC的中点，$AM=3$，$BC=10$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$________.

解析：利用极化恒等式，有$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}[(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2-(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})^2]=\frac{1}{4}(4\overrightarrow{AM}^2-\overrightarrow{BC}^2)=-16$.

(2)设圆O的半径为2，A，B是圆上两点且$\angle AOB=\frac{2\pi}{3}$，$MN$是直径，点$C$在圆内且满足$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}(0<\lambda<1)$，则$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CN}$的最小值为________.

解析：利用极化恒等式，有$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CN}=\frac{1}{4}[(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{CN})^2-(\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CN})^2]=\frac{1}{4}[(2\overrightarrow{CO})^2-16]$，

利用$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}(0<\lambda<1)$可知$C$点在$AB$上，易得结果.

(3)设$\triangle ABC$，P_0是边AB上一定点，满足$P_0B=\frac{1}{4}AB$，且对于边AB上任一点P，恒有$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\geqslant\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}$，则有(　　)

A. $\angle ABC=90°$　B. $\angle BAC=90°$

C. $AB=AC$　D. $AC=BC$

解析：$4\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=4\overrightarrow{PM}^2-\overrightarrow{BC}^2$，$4\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}=4\overrightarrow{P_0M}^2-\overrightarrow{BC}^2$，要使$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}\geqslant\overrightarrow{P_0B}\cdot\overrightarrow{P_0C}$成立，只需$|PM|>|P_0M|$. 所以$P_0M\perp AB$，所以$BC=AC$.

平面向量是高中数学考查的难点，而极化恒等式在数量积运算中的应用往往能极大地简化相关题目的运算，让原本复杂的题目迎刃而解. 因此，类似的小专题设计在二轮复习中是相当重要的，如"特例法"在解决高考小题中的应用，"特值法"在解题中给我们的启发等等的小专题都是有助于提升技巧的，笔者在这里就不一一举例.

"小专题"的大能量

1. 小专题的应用让二轮复习课切块成点，串点成线

高中数学的知识模块主体是不变的，在一轮复习的过程中，我们主要是以知识点的复习整理和系统形成为主要任务，重点在于落实基础知识和基本题型. 而二轮复习的知识模块还是有这么多，但我们已然不可能如一轮复习那样面面俱到，此时，我们只能将每一个知识模块分切成各个小知识点，从中择取部分常考点采取小专题形式各个击破. 但是小专题并不意味着独立的个体，每个专题之间还是互相联系的，把这些专题串成线，就成了我们的主要常考知识体系，学生对于考纲考点的要求也就把握得更准确了.

2. 小专题的应用让二轮复习课一针见血，事半功倍

我们在高三的复习过程中，往往在第一轮复习时是做得很实很细的，而到了二轮复习时，如果找不到好的复习模式，很多教师的复习课堂就变成出题解题，就题讲题，没有突破，没有架构，没有提升，学生在这样的复习课堂中只能是浪费时间. 二轮复习前后就一个多月，任意一节课我们都浪费不起. 因此，恰当的小专题式的复习模式，是让我们事半功倍的择优之举.

3. 小专题的应用让教师在二轮复习的设计中深入钻研，提升素养

课程的准备对教师来说就是专业知识的不断积累，素养的不断提升. 在二轮复习中采用小专题的模式，教师必须在选择、定位、设计、应用、调整、总结等各方面深入钻研，不仅对课程的设计要求高，同时对选题的准确性要求更高. 因此，在整个设计实施的过程中，教师的能力提升是显而易见的. 这样的师生互赢的复习模式自然是我们应该提倡的.

小专题式的二轮复习模式的研究，不是标新立异，而是对传统复习的一种改进，是完善二轮复习模式、提升二轮复习效率的一种探索. 经过这两年的高三教学中对小专题复习模式的尝试和实施，笔者体会到这种模式总体来说是让课堂实现了高效率的. 学生在这样的课堂模式下，也感觉到了复习过程轻松、知识点准备单一，但涵盖的思想方法、思维容量却又相当大，真正做到了"小专题，大容量"的效果. 笔者会继续将这种模式跟踪研究，逐步完善，寻找最优化复习课堂.