2024届高三第二次调研测试数学参考答案与讲评建议

一、选择题：

1． A　**2．** D　**3．** B　**4．** B　**5．** C　**6．** C　**7．** A　**8．** B

二、选择题：

9． AD　**10．** BCD　**11．** ACD

三、填空题：

12． 1　**13．** $\frac{3}{2}$　**14．** $\frac{5\sqrt{2}}{6}$；4π

四、解答题：

15． 解：（1）根据题意，知 $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$=\dfrac{1000\times(440\times40-60\times460)^2}{500\times500\times900\times100}$ …… 2 分

$=\dfrac{40}{9}>3.841$，

所以有 95%的把握认为消费者对新产品的满意度与性别有关． …… 5 分

（2）X 的可能取值为 0，1，2，3，且 $X\sim B(3,\frac{1}{10})$． …… 7 分

则 X 的分布列为：$P(X=0)=(\frac{9}{10})^3=\frac{729}{1\,000}$，$P(X=1)=C_3^1\times\frac{1}{10}\times(\frac{9}{10})^2=\frac{243}{1\,000}$，

$P(X=2)=C_3^2\times(\frac{1}{10})^2\times\frac{9}{10}=\frac{27}{1\,000}$，$P(X=3)=(\frac{1}{10})^3=\frac{1}{1\,000}$． …… 11 分

所以 X 的数学期望 $E(X)=\frac{3}{10}$． …… 13 分

16． 解：（1）因为 $f(x)$的图象的两条相邻对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$，所以 $f(x)$的周期为 π，

即 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，解得 $\omega=2$． …… 2 分

又 $f(-\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{2}$，故 $\sin(-\frac{\pi}{2}+\varphi)=-\frac{1}{2}$，即 $\cos\varphi=\frac{1}{2}$，又 $0<\varphi<\pi$，故 $\varphi=\frac{\pi}{3}$．

此时 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$． …… 4 分

因为函数 $f(x)$在区间$(0,m)$上有最大值无最小值，所以 $\frac{\pi}{2}<2m+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}$，

解得 $\frac{\pi}{12}<m\leqslant\frac{7\pi}{12}$． …… 7 分

（2）由（1）知，$f(-\frac{\pi}{6})=0$，$f'(x)=2\cos(2x+\frac{\pi}{3})$，则 $f'(-\frac{\pi}{6})=2$．

所以 l 的方程为 $y=2(x+\frac{\pi}{6})$． …… 10 分

记 $p(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})-2(x+\frac{\pi}{6})$，

则 $p'(x)=2\cos(2x+\frac{\pi}{3})-2\leqslant0$，故 $p(x)$ 单调递减． …… 13 分

又 $p(-\frac{\pi}{6})=0$，故 $p(x)$ 有唯一零点 $-\frac{\pi}{6}$．

所以 l 与曲线 $y=f(x)$有唯一的公共点． …… 15 分

17. 证明：选①因为E，F分别为BC，CD的中点，所以$EF\parallel BD$．　…… 2 分

又$BD\not\subset$平面EFG，$EF\subset$平面EFG，所以$BD\parallel$平面EFG．　…… 4 分

又$BD\subset$平面ABD，平面$ABD\cap$平面$EFG=GH$，所以$BD\parallel GH$．…6 分

选②在$\triangle ACD$中，$AG=2GD$，F为CD中点，

所以GF与AC不平行．　…… 2 分

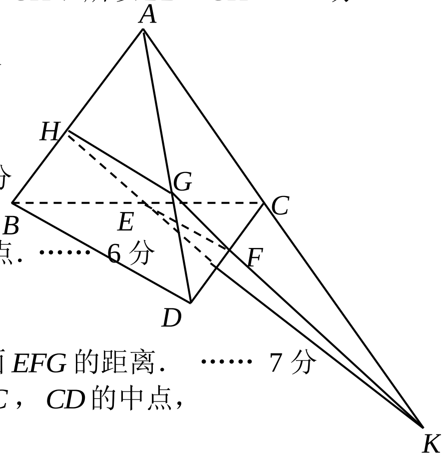
设$GF\cap AC=K$，则$K\in AC$，$K\in GF$．

又$AC\subset$平面ABC，$FG\subset$平面EFG，

所以$K\in$平面ABC，$K\in$平面EFG．…4 分

又平面$ABC\cap$平面$EFG=HE$，

所以$K\in HE$，所以HE,GF,AC相交于一点．…… 6 分



（2）解：若第（1）问中选①，

由（1）知，$BD\parallel$平面EFG．

所以点B到平面EFG的距离即为BD与平面EFG的距离．　…… 7 分

若第（1）问中选②，因为E，F分别为BC，CD的中点，

所以$EF\parallel BD$．

又$BD\not\subset$平面EFG，$EF\subset$平面EFG，所以$BD\parallel$平面EFG．

所以点B到平面EFG的距离即为BD与平面EFG的距离．　…… 7 分

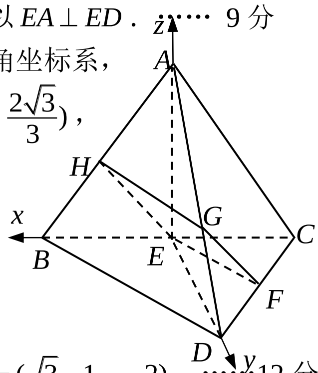
连接EA，ED，因为$\triangle ABC$，$\triangle BCD$均为正三角形，E为BC的中点，

所以$EA\perp BC$，$ED\perp BC$．

又平面$ABC\perp$平面BCD，平面$ABC\cap$平面$BCD=BC$，$AE\subset$平面ABC，

所以$AE\perp$平面BCD，又$ED\subset$平面BCD，所以$EA\perp ED$．…… 9 分

以$\overrightarrow{EB}$，$\overrightarrow{ED}$，$\overrightarrow{EA}$为基底建立如图所示空间直角坐标系，



则$B(2,0,0)$，$F(-1,\sqrt{3},0)$，$G(0,\frac{4\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3})$，

$\overrightarrow{EB}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{EF}=(-1,\sqrt{3},0)$，

$\overrightarrow{EG}=(0,\frac{4\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3})$．

设平面EFG的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{EG}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-x+\sqrt{3}y=0, \\ \frac{4\sqrt{3}}{3}y+\frac{2\sqrt{3}}{3}z=0,\end{cases}$不妨取$\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,-2)$．……12 分

设点B到平面EFG的距离为d，则$d=\frac{|\overrightarrow{EB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

所以BD与平面EFG的距离为$\frac{\sqrt{6}}{2}$．　…… 15 分

18.（1）当$n=1$时，$S_1=a_1-4a_2$，故$a_2=0$．

当$n\geqslant 2$时，$S_n=a_n-4a_{n+1}$，①

$S_{n-1}=a_{n-1}-4a_n$，②

①－②，$a_n=a_n-a_{n-1}-4a_{n+1}+4a_n$，即$4a_{n+1}=4a_n-a_{n-1}$．　…… 2 分

所以$2(2a_{n+1}-a_n)=2a_n-a_{n-1}$．又$2a_2-a_1=1\neq 0$，所以$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$2a_{n+1}-a_n\neq 0$，

所以$\frac{2a_{n+1}-a_n}{2a_n-a_{n-1}}=\frac{1}{2}$，所以$\{2a_{n+1}-a_n\}$是以1为首项，$\frac{1}{2}$为公比的等比数列．…4 分

（2）由（1）得，$2a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$.

所以$2^n a_{n+1}-2^{n-1}a_n=1$，所以$2^{n-1}a_n=n-2$，解得$a_n=\frac{n-2}{2^{n-1}}$. ······ 7 分

所以$b_n=\frac{n+2}{2^{n+3}n(n+1)}=\frac{1}{8}[\frac{1}{2^{n-1}n}-\frac{1}{2^n(n+1)}]$.

所以{ b_n }的前 n 项和为：

$\frac{1}{8}\{(1-\frac{1}{2\times 2})+(\frac{1}{2\times 2}-\frac{1}{2^2\times 3})+\cdots+[\frac{1}{2^{n-1}n}-\frac{1}{2^n(n+1)}]\}=\frac{1}{8}-\frac{1}{2^{n+3}(n+1)}$. ······10 分

（3）由（1）知，$S_n=\frac{n-2}{2^{n-1}}-4\times\frac{n-1}{2^n}=-\frac{n}{2^{n-1}}$.

因为S_p，S_6，S_q成等差数列，所以$-\frac{12}{2^5}=-\frac{p}{2^{p-1}}-\frac{q}{2^{q-1}}$，整理得$\frac{p}{2^p}+\frac{q}{2^q}=\frac{3}{16}$. ···12 分

因为$\frac{p}{2^p}+\frac{q}{2^q}=\frac{3}{16}$，所以$\frac{p}{2^p}<\frac{3}{16}$.

又$1\leqslant p<6$，$p\in\mathbf{N}^*$，经检验，只能$p=5$. ······ 14 分

所以$\frac{5}{32}+\frac{q}{2^q}=\frac{3}{16}$，故$\frac{q}{2^q}=\frac{1}{32}$.

令$d_n=\frac{n}{2^n}$，则$d_{n+1}-d_n=\frac{1-n}{2^{n+1}}\leqslant 0$，所以$d_1=d_2>d_3>d_4>d_5>\cdots$.

因为$d_8=\frac{1}{32}$,所以$q=8$.所以存在$p=5$,$q=8$,使得S_p，S_6，S_q成等差数列. ···17 分

19.（1）因为当 l 垂直于 x 轴时，$|AB|=2\sqrt{6}$，所以$\sqrt{3a^2-a^2}=\sqrt{6}$,解得$a=\sqrt{3}$. ···2 分

又因为椭圆Γ的离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得$b=1$，

所以Γ的方程为$\frac{x^2}{3}+y^2=1$. ······ 4分

（2）（i）**法1**：当l的斜率存在时，不妨设l的方程为：$y=kx+m$，

与椭圆Γ联立，消去y得，$(3k^2+1)x^2+6kmx+3m^2-3=0$.

因为直线l与椭圆Γ相切，所以$\Delta=(6km)^2-4(3k^2+1)(3m^2-3)=0$，

整理得，$m^2=3k^2+1$. ······ 6分

因为圆心O到直线l的距离$d=\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}$，

所以$d^2=\frac{m^2}{k^2+1}=\frac{3k^2+1}{k^2+1}=3-\frac{2}{k^2+1}\in[1，3)$，即$d\in[1，\sqrt{3})$. ······ 7分

则△PAB的面积为$S\leqslant\frac{1}{2}(d+3)\cdot|AB|=\frac{1}{2}\cdot(d+3)\cdot 2\sqrt{9-d^2}=\sqrt{(3-d)(d+3)^3}$.

设$f(d)=(3-d)(d+3)^3$，$1\leqslant d<\sqrt{3}$，则$f'(d)=2(d+3)^2(3-2d)$.

当$1\leqslant d<\frac{3}{2}$时，$f'(d)>0$，所以$f(d)$单调递增；

当$\frac{3}{2}<d<\sqrt{3}$时，$f'(d)<0$，所以$f(d)$单调递减.

所以 $d=\frac{3}{2}$ 时，$f(d)$ 取得最大值，此时 $S_{\max}=\frac{27\sqrt{3}}{4}$． …… 9分

当l的斜率不存在时，由（1）知，$S\leqslant\frac{1}{2}\times(\sqrt{3}+3)\times2\sqrt{6}=3\sqrt{2}+3\sqrt{6}$．

因为 $\frac{27\sqrt{3}}{4}>3\sqrt{2}+3\sqrt{6}$，所以 $d=\frac{3}{2}$． …… 10分

对于线段AB上任意点E，连结OE并延长与圆O交于点F，则F是圆上与E最近的点．

当E为线段AB的中点时，$|EF|$取得最大值$\frac{3}{2}$，所以$d\,(M，N)=\frac{3}{2}$． …12分

法2：设原点O到直线l的距离为d，$\triangle PAB$的面积为S，

则 $S\leqslant\frac{1}{2}(d+3)\cdot|AB|=\frac{1}{2}\cdot(d+3)\cdot2\sqrt{9-d^2}=\sqrt{(3-d)(d+3)^3}$．

设 $f(d)=(3-d)(d+3)^3$，$0\leqslant d<3$，则 $f'(d)=2(d+3)^2(3-2d)$．

当 $0\leqslant d<\frac{3}{2}$ 时，$f'(d)>0$，所以 $f(d)$ 单调递增；

当 $\frac{3}{2}<d<3$ 时，$f'(d)<0$，所以 $f(d)$ 单调递减．

所以 $d=\frac{3}{2}$ 时，$f(d)$ 取得最大值，此时 $S_{\max}=\frac{27\sqrt{3}}{4}$． …… 6分

显然l的斜率存在，不妨设l的方程为：$y=kx+m$，

与椭圆Γ联立，消去y得，$(3k^2+1)x^2+6kmx+3m^2-3=0$．

因为直线l与椭圆Γ相切，所以$\Delta=(6km)^2-4(3k^2+1)(3m^2-3)=0$．

整理得，$m^2=3k^2+1$．① …… 8分

因为 $d=\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}$，所以 $\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{3}{2}$．②

由①②，解得 $k^2=\frac{5}{3}$，$m^2=6$． …… 10分

由对称性，不妨设直线l方程为：$y=\frac{\sqrt{15}}{3}x+\sqrt{6}$．

对于线段AB上任意点E，连结OE并延长与圆O交于点F，则F是圆上与E最近的点．

当E为线段AB的中点时，$|EF|$取得最大值$\frac{3}{2}$，所以$d\,(M，N)=\frac{3}{2}$． …12分

（ii）证明：因为 $H(X，Y)$，$H(Y，Z)$，$H(X，Z)$ 均存在，

设点 X_1，$X_2\in X$，Y_1，$Y_2\in Y$，Z_1，$Z_2\in Z$，

且 $H(X，Z)=|X_1Z_1|$，$H(Y，Z)=|Y_1Z_2|$，$H(X，Y)=|X_2Y_2|$，

设 Y_2 是集合 Y 中到 X_2 的最近点，根据对称性，不妨设 $H(X，Y)=d(X，Y)=|X_2Y_2|$．

令点 X_2 到集合 Z 的最近点为 Z_3，点 Z_3 到集合 Y 的最近点为 Y_3．

因为 $|X_1Z_1|$ 是集合 X 中所有点到集合 Z 最近点距离的最大值，所以 $|X_1Z_1|\geqslant|X_2Z_3|$．

因为 $|Y_1Z_2|$ 是集合 Y 中所有点到集合 Z 最近点距离的最大值，所以 $|Y_1Z_2|\geqslant|Y_3Z_3|$．

所以 $H(X，Z)+H(Y，Z)=|X_1Z_1|+|Y_1Z_2|\geqslant|X_2Z_3|+|Y_3Z_3|$． ……15 分

因为在坐标平面中，$|X_2Z_3|+|Y_3Z_3|\geqslant|X_2Y_3|$，

又因为点 Y_2 是集合 Y 中到点 X_2 的最近点，所以 $|X_2Y_3|\geqslant|X_2Y_2|$．

所以 $H(X，Z)+H(Y，Z)\geqslant H(X，Y)$． ……17 分