

对数列错位相减法求和的探讨

秦文波 重庆市璧山区教师进修学校 402760

刘红梅 重庆市长生桥中学校 401336

[摘要] 为加深对数列错位相减法求和的理解,对该方法中广受关注的3个问题作探讨,获得3个结论:错位相减法并非差比数列的专属求和方法;当 $\{b_n\}$ 是公比为 $q(q \neq 1)$ 的等比数列时,只要 $\{a_n\}$ 使得 $\{c_n \cdot b_n\}$ (其中 $a_n - a_{n-1} = c_{n-1}, n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$)的前 n 项和能求出来,就可以用错位相减法求 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的和;用错位相减法求和时,可以在和式两边乘不是公比且不等于1的非零实数,这些结论可帮助师生对数列错位相减法求和形成更好的认知结构.

[关键词] 数列求和;错位相减法;差比数列;多项乘比数列

推导等比数列前 n 项和公式时,几乎所有高中数学新教材(2019年及以后出版的)都会介绍错位相减法,但是,同老教材一样,新教材并没有对错位相减法作更深入的介绍,这在某种程度上给许多师生带来了一些认知上的偏差.下面,笔者结合自己开展的专项教研活动,就数列错位相减法求和中一些师生关注的问题作简要探讨.

约定

为了叙述方便,本文有以下两点约定:

(1) 将“一个非零等差数列与一个公比不为1的等比数列对应项之积构成的数列”简称为“差比数列”.

(2) 设 $a_n \neq 0 (n \in \mathbf{N}^*)$, $\{b_n\}$ 是公比为

$q (q \neq 1)$ 的等比数列, $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n .

探讨

探讨1:是不是只有差比数列才能用错位相减法求得前 n 项和?

$S_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$ ①, 等式两边同乘 q 得 $qS_n = a_1 (qb_1) + a_2 (qb_2) + \cdots + a_n (qb_n) = a_1 b_2 + a_2 b_3 + \cdots + a_n b_{n+1}$ ②, 由①-②得 $(1-q)S_n = a_1 b_1 + [(a_2 - a_1)b_2 + \cdots + (a_n - a_{n-1})b_n] - a_n b_{n+1}$.

不难发现,能否用错位相减法求 S_n 的关键是能否求得 $(a_2 - a_1)b_2 + \cdots + (a_n - a_{n-1})b_n$. 不妨令 $T_{n-1} = (a_2 - a_1)b_2 + \cdots + (a_n - a_{n-1})b_n$. 如果 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, 则 $T_{n-1} = d(b_2 + \cdots + b_n)$, 根据等比数列

求和公式容易求得 T_{n-1} , 即可以用错位相减法求得差比数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和.

如果 $\{a_n\}$ 不是等差数列呢? 不妨令 $a_n - a_{n-1} = c_{n-1} (n \geq 2)$, 则 $T_{n-1} = c_1 b_2 + \cdots + c_{n-1} b_n$. 若 $\{c_n\}$ 是等差数列, 则 $\{c_n \cdot b_n\}$ 就是差比数列, 就可以用错位相减法求得 T_{n-1} , 即可以用错位相减法求得 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和. 另一方面, 由于 $a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = a_1 + c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1}$, 根据等差数列前 n 项和公式的性质可知, 这里的 $c_1 + c_2 + \cdots + c_{n-1}$ 是关于 n 的二次函数, 而等差数列的通项公式是关于 n 的一次函数, 故 $\{a_n\}$ 不是等差数列, 因此 $\{a_n \cdot b_n\}$ 不是差比数列, 但仍然可以用错位相减法求得 S_n , 只不过需要用到两次错位相减法.

作者简介: 秦文波(1986—), 硕士研究生, 中学一级教师, 从事中学数学教育教学研究工作, 曾获重庆市骨干教师、重庆市教科研先进个人等荣誉称号.

因此, 错位相减法并非差比数列的专属求和方法, 某些非差比数列也可用错位相减法求和.

探讨2: 什么样的 $\{a_n\}$ 可用错位相减法求得 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和?

由探讨1知, 当 $\{b_n\}$ 是公比为 $q (q \neq 1)$ 的等比数列且 $a_n - a_{n-1} = c_{n-1} (n \geq 2)$ 时, $\{a_n\}$ 为等差数列或 $\{c_n\}$ 为等差数列, 都可用错位相减法求 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和.

事实上, 当 $\{c_n\}$ 为等差数列时, 因为可用错位相减法求得 $\{c_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和, 所以也可用错位相减法求得 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和, 此时 a_n 是关于 n 的二次函数. 同样地, 当 c_n 为关于 n 的二次函数时, 由于可用错位相减法求得 $\{c_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和, 所以也可用错位相减法求得 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和, 此时 a_n 是关于 n 的三次函数. 进一步分析不难得到, 当 a_n 是关于 n 的多项式函数, 即 $a_n = t_0 + t_1 n + \dots + t_m n^m + \dots$ (t_i 为常数, $m \in \mathbb{N}^*$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$) 时, 均可用错位相减法求得 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和.

另外, 当 $\{c_n\}$ 为等比数列时, $\{c_n \cdot b_n\}$ 也为等比数列, a_n 可以写成 $a_n = A + B \cdot q_1^n$ (A, B, q_1 为非零常数) 的形式, 根据 a_n 的形式结构可知, $\{a_n \cdot b_n\}$ 既可分组求和也可错位相减求和. 同样地, 当 c_n 形如 $c_n = A + B \cdot q_1^n$ 时, $a_n = A + C + D \cdot q_1^n$ (A, C, D, q_1 为非零常数), $\{a_n \cdot b_n\}$ 也可用错位相减法求前 n 项和. 继续分析不难发现, 当 a_n 是关于 n 的多项式函数与形如 $B \cdot q_1^n$ 的指数型函数的和时, $\{a_n \cdot b_n\}$ 也可用错位相减法求前 n 项和.

综上, 当 $\{b_n\}$ 是公比为 $q (q \neq 1)$ 的等比数列时, 满足 $\{a_n \cdot b_n\}$ 可用错位相减法

求前 n 项和的 $\{a_n\}$ 有很多, 可以是等差数列, 也可以是多项式数列 (通项是关于 n 的多项式函数), 还可以是多项式数列与等比数列对应项之积构成的新数列 (以下简称“多项乘比数列”) 或其他数列, 只要 $\{a_n\}$ 使得 $\{c_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和能求出来即可.

探讨3: 用错位相减法求和时是不是一定要乘公比?

由探讨1可知, 用错位相减法求差比数列的前 n 项和时, 第一步是等式两边同“乘公比”, 其目的是在“错位”后“对位”, 而“对位”是为了整体“并项”, “并项”后就可以借助等比数列的求和公式完成差比数列求和. 因此, “乘公比”是非常重要的操作手段. 下面探讨“乘其他实数”的情况.

在探讨1中的等式①两边同乘 $t (t \neq q, t \neq 1, t \neq 0)$ 得 $tS_n = ta_1 b_1 + ta_2 b_2 + \dots + ta_n b_n = \frac{t}{q} a_1 (q b_1) + \frac{t}{q} a_2 (q b_2) + \dots + \frac{t}{q} a_n (q b_n)$ ③, 由①-③得 $(1-t)S_n = a_1 b_1 + \left[\left(a_2 - \frac{t}{q} a_1 \right) b_2 + \dots + \left(a_n - \frac{t}{q} a_{n-1} \right) b_n \right] - ta_n b_n$. 若 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, 则 $\left\{ a_n - \frac{t}{q} a_{n-1} \right\}$ 一定是等差数列, 所以 $\left\{ \left(a_n - \frac{t}{q} a_{n-1} \right) b_n \right\}$ 为差比数列, 故 $\left(a_2 - \frac{t}{q} a_1 \right) b_2 + \dots + \left(a_n - \frac{t}{q} a_{n-1} \right) b_n$ 可用错位相减法求得, 即可用错位相减法求 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和.

因此, 用错位相减法求和时, 可以在和式两边乘不是公比且不等于1的非零实数, 只不过要多用一次错位相减法. 所以, 乘公比并非错位相减法求和的必

然要求, 只是与乘其他实数相比, 乘公比更简单.

结语

一般地, 每一种数学运算方法都有其特定的运算对象和运算规则, 错位相减法也不例外. 对运算对象的深入理解和运算规则的牢固掌握是使用运算方法进行准确运算的前提, 每一种运算方法的教学都应在这两方面深入思考、下足功夫, 只有这样, 才能帮助学生形成正确的认知结构. 前述可知, 差比数列的前 n 项和虽然是错位相减法基本的运算对象, 但教师不能将其“窄化”于此; 乘公比虽然是错位相减法最佳的处理方式, 但教师不能不讲理由地生搬硬套, 并且给学生传达错误的观念.

另外, 错位相减法虽然是差比数列求和较好的方法, 但不是唯一的方法. 事实上, 如果设 $\{a_n\}$ 是以 $d (d \neq 0)$ 为公差的等差数列, 那么对于差比数列 $\{a_n \cdot b_n\}$, 由于 $a_n b_n = [nd + (a_1 - d)] b_1 q^{n-1}$, 所以当 $x = \frac{db_1}{q(q-1)}, y = \frac{(a_1 - d)b_1}{q(q-1)}$ 时, $[nd + (a_1 - d)] \cdot b_1 q^{n-1} = [x(n+1) + y] q^{n+1} - (xn + y) q^n$. 即对于差比数列 $\{a_n \cdot b_n\}$, 存在 $k_n = (xn + y) q^n$, 使得 $a_n b_n = k_{n+1} - k_n$ 成立. 因此, 除错位相减法外, 我们还可利用裂项相消法求差比数列的前 n 项和. 特别地, 由于等比数列 $\{b_n\}$ 是特殊的差比数列, 故也可用裂项相消法替代错位相减法推导其前 n 项和公式. 其实, 对于等比数列 $\{b_n\}$, 因为当 $k_n = \frac{b_n}{q-1}$ 时 $b_n = k_{n+1} - k_n$, 所以 $b_1 + b_2 + \dots + b_n = (k_2 - k_1) + (k_3 - k_2) + \dots + (k_{n+1} - k_n) = k_{n+1} - k_1 = \frac{b_{n+1}}{q-1} - \frac{b_1}{q-1} = \frac{b_1}{q-1} (1 - q^n)$.