对于一类数列新问题——奇数列、偶数列的探讨

邓超群　崔亭亭

（湖北省襄阳市第三中学）

新高考模式下，任何知识模块都有可能作为压轴题.这就导致有些知识考查难度上升，比如数列中出现对奇数列、偶数列问题的考查.在2021年（新高考第一年）的试题中，我们关注到全国Ⅰ卷解答题第17大题，它是一个涉及数列的奇数列、偶数列通项及前n项和的问题.这种细微的变化也让我们看到了新高考试题的创新与探索，它在考查学生逻辑推理的基础上，更注重思维品质的塑造.本文以2021年全国Ⅰ卷第17题为切入点，研究数列的奇数项、偶数项通项公式及求和.

1　对标新课标

《普通高中数学课程标准（2017年版2020年修订）》对数列提出如下要求.

1）通过日常生活中的实例，了解数列的概念和几种简单的表示方法：列表法、图像法、通项公式表示法等，了解数列是一种特殊函数.

2）通过实例，理解等差数列、等比数列的概念，探索并掌握等差数列、等比数列的通项公式与前n项和公式.在具体的问题情境中，发现数列的等差关系或等比关系，并能用有关知识解决相应问题.体会等差数列、等比数列与一次函数、指数函数的关系.

由此我们不难发现，在具体的问题情境中，把问题转化为等差数列、等比数列是关键.2021年全国Ⅰ卷第17题对于奇、偶混合型递推关系的数列问题，完全对标了标准里的这个要求，对学生的理解能力、数学抽象能力、逻辑推理能力、符号语言表达能力等优秀品质提出了更高的要求.本文力求通过数列奇、偶项的探讨，提升学生的思维品质.

2　对标新高考真题

例1　（2021年全国Ⅰ卷17）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，且

$$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1, & n\text{ 为奇数},\\ a_n+2, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

（1）记$b_n=a_{2n}$，写出b_1,b_2，并求数列$\{b_n\}$的通项公式；

（2）求$\{a_n\}$的前20项和.

解析　（1）由题设可得$b_1=a_2=a_1+1=2$，$b_2=a_4=a_3+1=a_2+2+1=5$，又$a_{2k+2}=a_{2k+1}+1$，$a_{2k+1}=a_{2k}+2$，$(k\in\mathbf{N}^*)$，故$a_{2k+2}=a_{2k}+3$，即$b_{n+1}=b_n+3$，即$b_{n+1}-b_n=3$，所以$\{b_n\}$是首项为2，公差为3的等差数列，故$b_n=2+(n-1)\times3=3n-1$.

（2）设$\{a_n\}$的前20项和为S_{20}，则$S_{20}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}$，因为$a_1=a_2-1$，$a_3=a_4-1$，…，$a_{19}=a_{20}-1$，所以$S_{20}=2(a_2+a_4+\cdots+a_{18}+a_{20})-10=2(b_1+b_2+\cdots+b_9+b_{10})-10=2\times\left(10\times2+\dfrac{9\times10}{2}\times3\right)-10=300$.

点评　本题在考查学生阅读理解能力的基础上，还考查学生的数学符号语言表达能力、逻辑推理能力.求解这种较复杂的混合型递推关系，需要先找到相邻两个奇数项的递推关系式，或相邻两个偶数项的递推关系式，把问题转化为研究奇数列和偶数列的规律.在第（2）问中，利用奇数列、偶数列之间的关系巧妙求和.由于求和项数不是特别多，学生可能会跳过找规律，选择逐项累加完成求和.

3　对标关键能力

数列求通项关键在于找相邻两项的递推关系式.如果没有相邻两个自然项的递推关系式，找相邻奇数项或偶数项的递推关系式也是可以的.例1中相邻两项递推关系式是有定义域要求的，这里的n分奇、偶讨论，考查学生的阅读能力和理解能力.教师可引导学生通过适当变形，找出相邻两个奇数项或偶数项的递推关系式，采用分奇、偶两大组讨论来研究通项，还可深入挖掘如何求$\{a_n\}$的前n项和S_n，让学生的思维能力再上一个台阶.

例2　例1中其他条件不变，求$\{a_n\}$的前n项和S_n.

解析 由 $b_n=3n-1$,可得

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{3}{2}n-1, & n\text{ 为偶数},\\[2mm] \dfrac{3}{2}n-\dfrac{1}{2}, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

当 n 为偶数时,有

$$S_n=(a_1+a_3+a_5+\cdots)+(a_2+a_4+a_6+\cdots)=$$

$$\frac{1+\frac{3}{2}(n-1)-\frac{1}{2}}{2}\cdot\frac{n}{2}+\frac{2+\frac{3}{2}n-1}{2}\cdot\frac{n}{2}=\frac{3}{4}n^2.$$

当 n 为奇数时,有

$$S_n=S_{n-1}+a_n=\frac{3}{4}(n-1)^2+\frac{3}{2}n-\frac{1}{2}=\frac{3n^2+1}{4},$$

当 $n=1$ 时等式也成立.

$$\text{综上,}S_n=\begin{cases}\dfrac{3}{4}n^2, & n\text{ 为偶数},\\[2mm] \dfrac{3n^2+1}{4}, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

点评 奇偶混合型数列求和分两步完成:第一步先求 n 为偶数时的前 n 项和,此时奇数列、偶数列项数各一半,均为 $\frac{n}{2}$,分奇、偶两组求和.第二步再求 n 为奇数时的前 n 项和,利用 $S_n=S_{n-1}+a_n$,此时 n 为奇数,$n-1$ 为偶数,S_{n-1} 可巧妙利用 n 为偶数时的前 n 项和公式.注意检验 $n=1$ 时公式是否成立.此题在例 1 的基础上提高了难度,将前 20 项和改为前 n 项和,与原题相比项数不确定,学生无法逐项累加得出正确答案,从探究问题本质的角度看,拓展后的问题更能激发学生的求知欲望,也更能触及问题的本质.

4 对标必备素养

在解决实际问题的过程中哪些情况下我们需要对数列分为奇数列、偶数列分析呢?通过归纳和整理,我们发现出现下列情况需要分类研究奇数列、偶数列.

1)数列中连续两项和或积的问题 $a_n+a_{n+1}=f(n)$ 或 $a_n\cdot a_{n+1}=f(n)$.

2)表达式中涉及周期性问题,例如出现 $(-1)^n$ 或 $\cos n\pi$ 等.

3)下标有明显的奇偶性,例如 $\{a_{2n}\}$,$\{a_{2n-1}\}$.

4)已知条件中明确奇数列、偶数列问题.

解决方法 若遇到第 1)种情况,我们需要把 n 换成 $n-1$,找出相邻两个奇数项或偶数项的递推关系式,进而求出通项公式,求解时,要注意首项和定义域的变化.

若遇到第 2)种情况,一般以一个周期为研究单元,把问题转化为找相邻两个单元之间的递推关系式.其本质还是找相邻两项递推关系式,尤其是含有 $(-1)^n$ 的表达式,一般分奇、偶讨论.

若遇到第 3)种和第 4)种情况,直接找相邻两个奇数项或偶数项的递推关系式,进而求出通项公式.此外,当我们没有思路时,还可以对数列进行列举,通过枚举法来发现规律,归纳出奇数项、偶数项的通项公式.

涉及奇数列、偶数列前 n 项求和问题一般分奇、偶两大组讨论,分组转化求和.注意最终结果能否合并,若能合并为一个表达式最好,若不能合并则用分段函数表示.

5 对标实践创新

下面给出练习题,对上述总结的要点进行具体应用,检测学生对求奇数列、偶数列通项公式及前 n 项和的逻辑推理过程是否领会到位.

例 3 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数,其前 n 项和为 S_n,且 $a_n^2=4S_n-2a_n-1$.

(1)求 a_n,S_n;

(2)设 $b_n=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a_n+1}+\sqrt{a_n+5}}, & n\text{ 为奇数},\\ S_n-S_{n-1}, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$ 求数列 $\{b_n\}$ 的前 8 项和 T_8.

解析 (1)由原式可得 $4S_n=a_n^2+2a_n+1$,当 $n=1$ 时,$4a_1=a_1^2+2a_1+1$,即 $a_1=1$;当 $n\geqslant 2$ 时,

$$\begin{cases}4S_n=a_n^2+2a_n+1,\\ 4S_{n-1}=a_{n-1}^2+2a_{n-1}+1,\end{cases}$$

两式作差可得 $4a_n=a_n^2-a_{n-1}^2+2(a_n-a_{n-1})$,所以

$$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1})=2(a_n+a_{n-1}).$$

又因为 $a_n>0$,则 $a_n+a_{n-1}>0$,所以 $a_n-a_{n-1}=2$,所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1,公差为 2 的等差数列,则

$$a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1,$$

$$S_n=\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2,$$

所以 $a_n=2n-1$,$S_n=n^2$.

(2)由题意可得

$$b_n=\begin{cases}\sqrt{n+2}-\sqrt{n}, & n\text{ 为奇数},\\ 2n-1, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$$

所以 $T_8=b_1+b_2+\cdots+b_8=$

$$(b_1+b_3+b_5+b_7)+(b_2+b_4+b_6+b_8)=$$

$$\sqrt{3}-1+\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{5}+\sqrt{9}-$$

$$\sqrt{7}+(3+7+11+15)=38,$$

即数列$\{b_n\}$的前 8 项和 $T_8=38$.

例 4 已知 $f(x)=2\sqrt{3}\sin(\omega\pi x)\cos(\omega\pi x)-2\sin^2(\omega\pi x)+1\ (\omega>0)$,其最小正周期为 1.

(1)求 ω 及 $f(x)$的解析式;

(2)若 $f(x)=1$ 在区间$(0,+\infty)$上的根按从小到大的顺序依次记为 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$,求数列$\{a_n\}$的通项公式及其前 n 项和 S_n.

解析 (1)$f(x)=\sqrt{3}\sin(2\omega\pi x)+\cos(2\omega\pi x)=$

$$2\sin(2\omega\pi x+\frac{\pi}{6}).$$

因为 $f(x)$的最小正周期为 1,所以$\frac{2\pi}{2\pi\omega}=1$,即 $\omega=1$,$f(x)=2\sin(2\pi x+\frac{\pi}{6})$.

(2)由 $f(x)=1$,即 $2\sin(2\pi x+\frac{\pi}{6})=1$,得$2\pi x+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{6}$或 $2k\pi+\frac{5\pi}{6}(k\in\mathbf{N}^*)$,所以 $x=k$ 或$k+\frac{1}{3}(k\in\mathbf{N}^*)$,故 $a_1=\frac{1}{3}$,$a_2=1$,$a_3=\frac{4}{3}$,$a_4=2$,$a_5=\frac{7}{3}$,$a_6=3$,$\cdots$,所以

$$a_n=\begin{cases}\frac{3n-1}{6}, & n\text{ 为奇数},\\ \frac{n}{2}, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

当 n 为偶数时,有

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=$$

$$\frac{\frac{n}{2}(\frac{1}{3}+\frac{3n-4}{6})}{2}+\frac{\frac{n}{2}(1+\frac{n}{2})}{2}=\frac{n(3n+2)}{12}.$$

当 n 为奇数,且 $n\geqslant2$ 时,有

$$S_n=S_{n-1}+a_n=\frac{(n-1)(3n-1)}{12}+\frac{3n-1}{6}=$$

$$\frac{(n+1)(3n-1)}{12}.$$

当 $n=1$ 时,符合上式,所以

$$S_n=\begin{cases}\frac{(n+1)(3n-1)}{12}, & n\text{ 为奇数},\\ \frac{n(3n+2)}{12}, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

例 5 对于正项数列$\{a_n\}$,定义 $G_n=\frac{a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n}{n}$为数列$\{a_n\}$的“匀称”值.

(1)若数列$\{a_n\}$的“匀称”值 $G_n=n$,求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)若数列$\{a_n\}$的“匀称”值 $G_n=2$,设 $b_n=(-1)^{n+1}\frac{8}{(4n^2-1)a_n}$,求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n.

解析 (1)由题意可知

$$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=n^2. \quad ①$$

当 $n\geqslant2$ 时,有

$$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}=(n-1)^2. \quad ②$$

①－②可知 $na_n=2n-1$,所以

$$a_n=\frac{2n-1}{n}(n\geqslant2),$$

当 $n=1$ 时也符合上式,故 $a_n=\frac{2n-1}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)同(1)可得 $a_n=\frac{2}{n}\ (n\in\mathbf{N}^*)$,且

$$b_n=(-1)^{n+1}\times\frac{8}{(4n^2-1)\times\frac{2}{n}}=$$

$$(-1)^{n+1}\times(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}).$$

当 n 为偶数时,有

$$S_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=$$

$$(1+\frac{1}{3})-(\frac{1}{3}+\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{7})+\cdots-$$

$$(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1})=1-\frac{1}{2n+1}.$$

当 n 为奇数时,有

$$S_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=$$

$$(1+\frac{1}{3})-(\frac{1}{3}+\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{7})+\cdots+$$

$$(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1})=1+\frac{1}{2n+1}.$$

综上,$S_n=\begin{cases}1-\frac{1}{2n+1}, & n\text{ 为偶数},\\ 1+\frac{1}{2n+1}, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}$

(完)