·基础精讲·

借助常数列,解数列通项问题

邵南(江苏省徐州市沛县歌风中学　221600)

【摘　要】 数列通项的求解方法数不胜数,但常数列却凭借特殊的性质,恰当借助构造的常数列,可以简化求解如 $a_{n+1}=f(n)a_n$,$a_{n+1}=f(n)a_n+g(n)$,$a_{n+1}=pa_n+Aq^n(A\neq 0)$ 这三种类型的数列通项的问题.

【关键词】 高中数学;常数列;数列通项

数列作为数学中重要的知识点,求解其通项公式是经常考查的内容.常见的求解方法有累加法,累乘法,将数列转化成等差、等比数列,也可以利用数列前 n 项和 S_n 与数列通项 a_n 之间的关系间接求解.常数列作为一种特殊的数列,其鲜明特征是在数列 $\{a_n\}$ 中,满足 $a_n=a_{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$,恰当地构造常数列,可以简化求解数列通项的问题,提高解题效率.

类型1　形如 $a_{n+1}=f(n)a_n$ 的数列,如果 $f(n)=\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$,则有 $\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\dfrac{a_n}{b_n}$,则数列 $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ 是常数列.

例1　在数列中,已知 $a_1=1$,前 n 项和满足 $S_n=\dfrac{n+2}{3}a_n$.

(1) 求 a_2 与 a_3;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解　(1) 因为 $a_1=1,S_n=\dfrac{n+2}{3}a_n$,

所以 $S_2=a_1+a_2=\dfrac{2+2}{3}a_2$,

解得 $a_2=3$,

$S_3=a_1+a_2+a_3=\dfrac{3+2}{3}a_3$,

解得 $a_3=6$.

(2) $S_n=\dfrac{n+2}{3}a_n,S_{n+1}=\dfrac{n+3}{3}a_{n+1}$,

两式相减,得到 $na_{n+1}=(n+2)a_n$,

等号两边同时除以 $n(n+2)$,

转化得到 $\dfrac{a_{n+1}}{(n+2)(n+1)}=\dfrac{a_n}{(n+1)n}$,

所以数列 $\left\{\dfrac{a_n}{(n+1)n}\right\}$ 是各项为 $\dfrac{1}{2}$ 的常数列,

则 $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2},n\in\mathbf{N}^*$.

问题(1) 主要借助 $a_1=1$,前 n 项和满足 $S_n=\dfrac{n+2}{3}a_n$ 进行展开求解,相对简单;问题(2),首先是通过关系式 $S_n=\dfrac{n+2}{3}a_n$ 写出前 $n+1$ 项的和(即 S_{n+1}),然后作差得到 a_{n+1} 与 a_n 的关系式,再将其凑成常数列 $\left\{\dfrac{a_n}{(n+1)n}\right\}$ 的形式,最后求得数列 a_n 的通项.

类型2　形如 $a_{n+1}=f(n)a_n+g(n)$ 的数列,可以先构造辅助数列 $\{b_n\}$,使得 $f(n)=\dfrac{b_n}{b_{n+1}}$,则 $a_{n+1}=\dfrac{b_n}{b_{n+1}}a_n+g(n)$,用累乘法求得 $b_{n+1}=\dfrac{b_1}{f(n)f(n-1)\cdots f(2)f(1)}$,$b_1$ 根据情况适当选取,然后将 $a_{n+1}=\dfrac{b_n}{b_{n+1}}a_n+g(n)$ 两边同时乘以 b_{n+1},得到 $a_{n+1}b_{n+1}=b_na_n+g(n)b_{n+1}$.如果 $g(n)b_{n+1}$ 可以写成 $g(n)b_{n+1}=c_{n+1}-c_n$,则构造的数列 $\{a_nb_n-c_n\}$ 或者 $\{a_nb_n+c_n\}$ 是常数列,进而可以

求解数列$\{a_n\}$通项.

例2 已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=\frac{1}{2}$，S_n表示其前n项和，且$S_n=n^2a_n-n(n-1)$，$n=1,2,\cdots$，求数列$\{a_n\}$.

解 因为$S_n=n^2a_n-n(n-1)$，

所以$S_{n+1}=(n+1)^2a_{n+1}-n(n+1)$，

两式相减整理得到$a_{n+1}=\frac{n}{n+2}a_n+\frac{2}{n+2}$，

等式两边同乘$(n+2)(n+1)$，

$(n+2)(n+1)a_{n+1}=(n+1)na_n+2(n+1)$，

又因为$2(n+1)=(n+2)(n+1)-(n+1)n$，

所以数列$\{(n+1)na_n-(n+1)n\}$是常数列，

$(n+1)na_n-(n+1)n=2a_1-2=-1$，

所以$a_n=1-\frac{1}{(n+1)n}$.

利用已知条件$S_n=n^2a_n-n(n-1)$，延伸出$S_{n+1}=(n+1)^2a_{n+1}-n(n+1)$，再利用作差法并化简得到$a_{n+1}=\frac{n}{n+2}a_n+\frac{2}{n+2}$，分式两边同时乘以$(n+2)(n+1)$，去掉分母得到$(n+2)(n+1)a_{n+1}=(n+1)na_n+2(n+1)$此时需要注意将$2(n+1)$分解成$(n+2)(n+1)-(n+1)n$以便构造常数列.

类型3 形如$a_{n+1}=pa_n+Aq^n(A\neq0)$，此类递推关系求通项，可以两边先同时除以$p^{n+1}$，再设$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}+x\frac{q_{n+1}}{p^{n+1}}=\frac{a_n}{p^n}+x\frac{a_n}{p^n}$，然后利用待定系数法求解未知数$x$，化成求常数列$\left\{\frac{a_n}{p^n}+x\frac{a_n}{p^n}\right\}$的通项，最后求解出数列$\{a_n\}$的通项.

例3 S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，已知$a_1=a$，$a_{n+1}=S_n+3^n$，$n\in\mathbf{N}^*$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解 因为$a_1=a$，$a_{n+1}=S_n+3^n$，

所以$a_2=S_1+3=a+3$，

由题意得$a_{n+1}=S_n+3^n$，$a_n=S_{n-1}+3^{n-1}$，

两式相减整理可得$a_{n+1}=2a_n+2\cdot3^{n-1}$，

变形得到$\frac{a_{n+1}}{2^n}-2\left(\frac{3}{2}\right)^n=\frac{a_n}{2^{n-1}}-2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$，

所以数列$\frac{a_n}{2^{n-1}}-2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$是个常数列.

所以$\frac{a_n}{2^{n-1}}-2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}=\frac{a_2}{2^{n-1}}-2\left(\frac{3}{2}\right)^{2-1}=\frac{a-3}{2}$，

所以$a_n=2\cdot3^{n-1}+(a-3)\cdot2^{n-2}(n\geqslant2)$.

综上，数列$\{a_n\}$的通项公式为

$$a_n=\begin{cases}2\cdot3^{n-1}+(a-3)\cdot2^{n-2}(n\geqslant2),\\a(n=1).\end{cases}$$

此题需要通过已知的$a_{n+1}=S_n+3^n$关系式，引申得到$a_n=S_{n-1}+3^{n-1}$，并利用作差法，搭建a_{n+1}与a_n的关系式，转化成熟悉的$a_{n+1}=pa_n+Aq^n(A\neq0)$的递推关系求通项.

结语

以上求数列的通项，主要借助已知的等量关系，延伸出$n+1$项或n项的等量关系的式子，然后将两个式子作差(或求和)，构造出有关数列a_{n+1}与a_n的关系，并借助递推关系构造出一个常数列来解题.熟悉这三种类型的解题思路，可以快速高效地解决此类数列$\{a_n\}$通项的问题.

参考文献：

[1]朱磊.利用待定系数法 巧求数列的通项公式[J].数理化解题研究，2022(34)：28－30.

[2]潘敬贞，陈焕涛，张应楷.深度学习视域下的单元复习教学——以“构造常数列解决递推数列通项公式”单元复习教学为例[J].高中数学教与学，2023(02)：37－40.

[3]闫文娟.数列递推公式在求通项中的应用[J].中学生数理化(高二数学)，2023(02)：28－29＋39.