构造常数列求解数列通项公式

钟国城

（广东梅县东山中学，广东 梅州 514017）

摘　要：根据数列的递推关系求解其通项公式是高考的常考内容，也是热点、难点内容. 文章通过探究总结构造常数列，求解高考中常见递推数列的通项公式，以提高学生数学思维能力.

关键词：递推关系；通项公式；常数列

中图分类号：G632　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1008－0333(2023)16－0066－03

根据数列的递推关系求解其通项公式是高考的常考内容，也是热点、难点内容. 常数列是最简单的一种数列，若能把数列的递推关系通过转化构造出常数列，利用常数列的性质求解通项公式，既能减少运算（有时还能避免分类讨论），又能提高数学思维，提升数学核心素养. 本文探究总结如何构造常数列求解高考中常见递推数列的通项公式，以期对大家有所帮助.

1 递推关系形如 $a_{n+1}-a_n=f(n)$

对于上述类型，除了使用累加法进行求解外，亦可这样处理：令 $f(n)=b_{n+1}-b_n$，则 $a_{n+1}-a_n=b_{n+1}-b_n$. 即 $a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n$.

故 $\{a_n-b_n\}$ 为常数列，所以 $a_n-b_n=a_1-b_1$.

即 $a_n=a_1-b_1+b_n$.

例1　在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+\ln(1+\frac{1}{n})$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n.

解析　由 $a_{n+1}=a_n+\ln(1+\frac{1}{n})$，得

$$a_{n+1}=a_n+\ln\frac{n+1}{n}=a_n+\ln(n+1)-\ln n.$$

即 $a_{n+1}-\ln(n+1)=a_n-\ln n$.

故 $\{a_n-\ln n\}$ 为常数列.

所以 $a_n-\ln n=a_1-\ln 1=1$.

则 $a_n=1+\ln n$.

2 递推关系形如 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$

对于上述类型，除了使用累乘法进行求解外，亦可这样处理：令 $f(n)=\frac{b_{n+1}}{b_n}$，则 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{b_{n+1}}{b_n}$.

即 $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\frac{a_n}{b_n}$.

故 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 为常数列.

所以 $\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1}{b_1}$.

即 $a_n=\frac{a_1}{b_1}\cdot b_n$.

例2　在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n.

解析　由 $a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n$，得

$(n+1)a_{n+1}=na_n$.

收稿日期：2023－03－05

作者简介：钟国城（1986.6－），男，广东省五华人，本科，中学一级教师，从事高中数学教学研究.

故$\{na_n\}$为常数列.

所以 $na_n=1\cdot a_1=1$.

则 $a_n=\frac{1}{n}$.

3 递推关系形如 $a_{n+1}=pa_n+q(p,q\neq1,0)$

对于上述类型,除了使用待定系数法构造等比数列外,亦可这样处理:由 $a_{n+1}=pa_n+q$,得 $a_{n+1}+\frac{q}{p-1}=p(a_n+\frac{q}{p-1})$.

即$\frac{a_{n+1}+q/(p-1)}{p^{n+1}}=\frac{a_n+q/(p-1)}{p^n}$.

故$\left\{\frac{a_n+q/(p-1)}{p^n}\right\}$为常数列.

所以$\frac{a_n+q/(p-1)}{p^n}=\frac{a_1+q/(p-1)}{p}$.

即 $a_n=(a_1+\frac{q}{p-1})p^{n-1}-\frac{q}{p-1}$.

例 3 在数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,$a_{n+1}=3a_n+2$,求数列$\{a_n\}$的通项公式 a_n.

解析 由 $a_{n+1}=3a_n+2$,得

$a_{n+1}+1=3(a_n+1)$.

即$\frac{a_{n+1}+1}{3^{n+1}}=\frac{a_n+1}{3^n}$.

故$\left\{\frac{a_n+1}{3^n}\right\}$为常数列.

所以$\frac{a_n+1}{3^n}=\frac{a_1+1}{3}=\frac{2}{3}$.

则 $a_n=2\cdot3^{n-1}-1$.

4 递推关系形如 $a_{n+1}=pa_n+f(n)(p\neq1,0)$

此类型可以看作类型 3 的拓展,处理方法类似:由 $a_{n+1}=pa_n+f(n)$,得

$a_{n+1}+g(n+1)=p[a_n+g(n)]$.

即$\frac{a_{n+1}+g(n+1)}{p^{n+1}}=\frac{a_n+g(n)}{p^n}$.

故$\left\{\frac{a_n+g(n)}{p^n}\right\}$为常数列.

所以$\frac{a_n+g(n)}{p^n}=\frac{a_1+g(1)}{p}$.

即 $a_n=[a_1+g(1)]p^{n-1}-g(n)$,其中 $f(n)=pg(n)-g(n+1)$.

例 4 在数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,$a_{n+1}=3a_n+2^n$,求数列$\{a_n\}$的通项公式 a_n.

解析 由 $a_{n+1}=3a_n+2^n$,得

$a_{n+1}+2^{n+1}=3(a_n+2^n)$.

即$\frac{a_{n+1}+2^{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{a_n+2^n}{3^n}$.

故$\left\{\frac{a_n+2^n}{3^n}\right\}$为常数列.

所以$\frac{a_n+2^n}{3^n}=\frac{a_1+2}{3}=1$.

则 $a_n=3^n-2^n$.

例 5 在数列$\{a_n\}$中,$a_1=3$,$a_{n+1}=3a_n-4n$,求数列$\{a_n\}$的通项公式 a_n.

解析 由 $a_{n+1}=3a_n-4n$,得

$a_{n+1}-2(n+1)-1=3(a_n-2n-1)$.

即$\frac{a_{n+1}-2(n+1)-1}{3^{n+1}}=\frac{a_n-2n-1}{3^n}$.

故$\left\{\frac{a_n-2n-1}{3^n}\right\}$为常数列.

所以$\frac{a_n-2n-1}{3^n}=\frac{a_1-2-1}{3}=0$.

则 $a_n=2n+1$.

5 递推关系形如 $a_{n+1}=\frac{pa_n}{qa_n+r}(p\neq r,pqr\neq0)$

由 $a_{n+1}=\frac{pa_n}{qa_n+r}$,得$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{r}{p}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{q}{p}$,此时转化为类型 3 求解.

例 6 在数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,$a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+2}$,求数列$\{a_n\}$的通项公式 a_n.

解析 由 $a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+2}$,得

$\frac{1}{a_{n+1}}=2\cdot\frac{1}{a_n}+1$.

即$\frac{1}{a_{n+1}}+1=2(\frac{1}{a_n}+1)$.

即$\frac{1/a_{n+1}+1}{2^{n+1}}=\frac{1/a_n+1}{2^n}$.

故$\left\{\frac{1/a_n+1}{2^n}\right\}$为常数列.

所以$\frac{1/a_n+1}{2^n}=\frac{1/a_1+1}{2}=1$.

则 $a_n=\frac{1}{2^n-1}$.

6 递推关系形如 $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$

(1)当 $p+q=1$ 时,$a_{n+2}=(1-q)a_{n+1}+qa_n$,即 $a_{n+2}-a_{n+1}=-q(a_{n+1}-a_n)$.

即$\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{(-q)^{n+1}}=\frac{a_{n+1}-a_n}{(-q)^n}$.

故$\left\{\frac{a_{n+1}-a_n}{(-q)^n}\right\}$为常数列.

所以$\frac{a_{n+1}-a_n}{(-q)^n}=\frac{a_2-a_1}{-q}$.

即 $a_{n+1}-a_n=(a_2-a_1)(-q)^{n-1}$,此时转化为类型1求解.

例7 在数列$\{a_n\}$中,$a_1=8$,$a_2=2$,$a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n$,求数列$\{a_n\}$的通项公式 a_n.

解析 由 $a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n$,得

$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)$.

即$\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{3^{n+2}}=\frac{a_{n+1}-a_n}{3^{n+1}}$.

故$\left\{\frac{a_{n+1}-a_n}{3^{n+1}}\right\}$为常数列.

所以$\frac{a_{n+1}-a_n}{3^{n+1}}=\frac{a_2-a_1}{3^2}=\frac{-2}{3}$.

即 $a_{n+1}-a_n=-2\cdot 3^n$.

所以 $a_{n+1}+3^{n+1}=a_n+3^n$.

故$\{a_n+3^n\}$为常数列.

所以 $a_n+3^n=a_1+3=11$.

则 $a_n=11-3^n$.

(2)当 $p^2+4q\geqslant 0$ 时,由 $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$,得 $a_{n+2}+\lambda a_{n+1}=\mu(a_{n+1}+\lambda a_n)$,其中$\begin{cases}\mu-\lambda=p,\\ \lambda\mu=q,\end{cases}$则

$\frac{a_{n+2}+\lambda a_{n+1}}{\mu^{n+2}}=\frac{a_{n+1}+\lambda a_n}{\mu^{n+1}}$.

故$\left\{\frac{a_{n+1}+\lambda a_n}{\mu^{n+1}}\right\}$为常数列.

所以$\frac{a_{n+1}+\lambda a_n}{\mu^{n+1}}=\frac{a_2+\lambda a_1}{\mu^2}$.

即 $a_{n+1}=-\lambda a_n+(a_2+\lambda a_1)\mu^{n-1}$,此时转化为类型4求解.

例8 在数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,$a_2=5$,$a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$,求数列$\{a_n\}$的通项公式 a_n.

解析 由 $a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$,得

$a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n)$.

即$\frac{a_{n+2}-2a_{n+1}}{3^{n+2}}=\frac{a_{n+1}-2a_n}{3^{n+1}}$.

故$\left\{\frac{a_{n+1}-2a_n}{3^{n+1}}\right\}$为常数列.

所以$\frac{a_{n+1}-2a_n}{3^{n+1}}=\frac{a_2-2a_1}{3^2}=\frac{1}{3}$.

即 $a_{n+1}-2a_n=3^n$.

所以 $a_{n+1}-3^{n+1}=2(a_n-3^n)$.

即$\frac{a_{n+1}-3^{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n-3^n}{2^n}$.

故$\left\{\frac{a_n-3^n}{2^n}\right\}$为常数列.

所以$\frac{a_n-3^n}{2^n}=\frac{a_1-3}{2}=-1$.

则 $a_n=3^n-2^n$.

以上例子可以看出,通过构造常数列能轻而易举地解决复杂的求通项公式问题,但构造常数列的方法对学生的综合能力要求很高,因此需要学生在平时的学习中扎实基本功,掌握知识本质,善于总结不同类型的构造技巧,领悟使用构造常数列求通项公式的思路,这样才能在解题中融会贯通,举一反三,从而真正地提高解题能力,提升数学核心素养.

参考文献:

[1] 古诗源.例举数列结构不良问题的解题策略[J].数理化解题研究,2022(19):64-66.

[2] 杨蓓蓓,王佳.借助构造法 解答高考数学题[J].数理化解题研究,2022(10):21-23.

[责任编辑:李 璟]