把握数列概念本质 巧用数列通项特征

——2023年高考数列试题赏析

■天元公学·杭二中未来科技城学校 顾建伟
■天元公学·杭二中未来科技城学校 皇甫琴

数列问题的解决需要整体把握题中的所有信息,注意数列概念的内涵蕴含在题中的点,合理恰当地使用数列基本量与数列的性质解决问题,渗透了数列运算中的方程思想、函数思想、分类讨论思想等,体现了数学运算、逻辑推理等数学核心素养。

数列一直是高考的“高频考点”,选择题、填空题、解答题都会呈现,尤其在解答题中占有重要的一席之地,从历年全国卷对数列的考查难度与力度来看,是同学们比较容易得分的地方,所以掌握这类问题的有效解决途径是我们必不可少的技能。

一、以方程思想进行数列基本量的运算

1. 直接列方程进行基本量运算

例1 (2023年全国乙卷理科T15)已知$\{a_n\}$为等比数列,$a_2a_4a_5=a_3a_6$,$a_9a_{10}=-8$,则$a_7=$____。

解析:由等比数列的性质知$a_2a_4a_5=a_2a_3a_6=a_3a_6$,所以$a_2=1$。

由$a_9a_{10}=a_2q^7a_2q^8=(a_2)^2q^{15}=-8$,可得$q^{15}=(q^5)^3=-8$,即$q^5=-2$,所以$a_7=a_2\cdot q^5=1\times(-2)=-2$。

故填-2。

评注:本题主要考查等比数列的基本量运算,直接根据等比数列的基本定义和性质即可求解。

例2 (2023年全国乙卷文科T18节选)记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和,已知$a_2=11$,$S_{10}=40$。

求数列$\{a_n\}$的通项公式。

解析:在等差数列$\{a_n\}$中,因为$a_2=11$,$S_{10}=40$,所以$\begin{cases}a_1+d=11,\\10a_1+\dfrac{10\times9}{2}d=40,\end{cases}$即

球心到平面PBC的距离为____。

解析:如图1,取AD的中点为M,过M作平面PAD的垂线l_1,取正方形$ABCD$的中心为O,过O作底面$ABCD$的垂线l_2,则l_1与l_2的交点O,即为四棱锥P-$ABCD$的外接球的球心,由$V_{三棱锥O-PBC}=V_{三棱锥P-OBC}$,可得球心$O$到平面$PBC$的距离为$\frac{\sqrt5}{5}$。

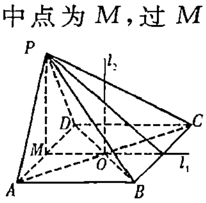

图1

变式:如图2,在四棱锥P-$ABCD$的平面展开图中,四边形$ABCD$是边长为2的正方形,$\triangle ADE$是以AD为斜边的等腰直角三角形,$\angle HDC=\angle FAB=90°$,则四棱锥$P$-$ABCD$的外接球的球心到平面$PBC$的距离为____。

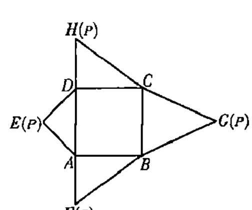

图2

解析:由$\angle HDC=\angle FAB=90°$,且点$H$、$F$、$E$、$G$重合,可知$AB\perp$平面$PAD$,平面$PAD\perp$平面$ABCD$。取$AD$的中点为$M$,过$M$作平面$PAD$的垂线$l_1$,取正方形$ABCD$的中心为$O$,过$O$作底面$ABCD$的垂线$l_2$,则$l_1$与$l_2$的交点$O$,即为四棱锥$P$-$ABCD$的外接球的球心,由$V_{三棱锥O-PBC}=V_{三棱锥P-OBC}$,可得球心$O$到平面$PBC$的距离为$\frac{\sqrt5}{5}$。

情境作为考查载体将会越来越普遍,学习中要提升阅读和分析能力,提取有用信息和关键信息,构建恰当的数学模型,运用所学知识进行数据处理和计算,最终得到结果,这也是数学核心素养的要求。

(责任编辑 王福华)

$\begin{cases}a_1+d=11,\\a_1+\dfrac{9}{2}d=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=13,\\d=-2,\end{cases}$ 所以 $a_n=13-2(n-1)=-2n+15(n\in\mathbf{N}^*)$。

评注：本题主要考查等差数列的通项公式和数列求和，建立方程组求出数列中的基本量“首项和公差”是解决本题的关键。

例3 (2023年全国甲卷理科T5)已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，$S_5=5S_3-4$，则$S_4=$(　　)。

A. 7　　B. 9　　C. 15　　D. 30

解析：设等比数列$\{a_n\}$的公比为q。

由$a_1=1$，S_n为$\{a_n\}$的前n项和，$S_5=5S_3-4$，显然$q\neq\pm1$。(如果$q=1$，可得$5=15-4$，矛盾；如果$q=-1$，可得$-1=-5-4$，矛盾)

由$S_5=5S_3-4$，可得$\frac{1-q^5}{1-q}=5\cdot\frac{1-q^3}{1-q}-4$，解得$q^2=4$，所以$q=2$或$q=-2$。

当$q=2$时，$S_4=\frac{1-q^4}{1-q}=\frac{1-16}{1-2}=15$。

当$q=-2$时，$S_4=\frac{1-q^4}{1-q}=\frac{1-16}{1+2}=-5$，没有选项。

故选C。

评注：本题考查等比数列的前n项和为S_n的基本量运算，根据条件列方程求解等比数列的公比即可。

2. 等差数列、等比数列的常用性质与基本量运算相结合

例4 (2023年全国甲卷文科T5)记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和。若$a_2+a_6=10$，$a_4a_8=45$，则$S_5=$(　　)。

A. 25　　B. 22　　C. 20　　D. 15

解析：在等差数列$\{a_n\}$中，因为$a_2+a_6=2a_4=10$，所以$a_4=5$，所以$a_4a_8=5a_8=45$，故$a_8=9$，则$d=\frac{a_8-a_4}{8-4}=1$，$a_1=a_4-3d=5-3=2$，所以$S_5=5a_1+\frac{5\times4}{2}d=10+10=20$。

故选C。

评注：由已知条件结合等差数列的等和性，以及通项公式先求出a_1，d，然后结合等差数列的求和公式即可求得结果。

二、数列本质理解层面的简单运用

数列是特殊的函数，在数列的运算中也往往会蕴藏很多的函数特征。例如等差数列的通项是一次函数，前n项和为二次函数，与等比数列联系密切的是指数函数；又如函数中的周期性、对称性、单调性等特征也能在数列中得以体现。

1. 数学运算能力的深度考查

例5 (2023年全国甲卷T17)已知数列$\{a_n\}$中，$a_2=1$，设S_n为$\{a_n\}$的前n项和，$2S_n=na_n$。

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\left\{\frac{a_n+1}{2^n}\right\}$的前$n$项和$T_n$。

解析：(1)当$n=1$时，$2S_1=a_1$，解得$a_1=0$。

当$n\geqslant2$时，$2S_{n-1}=(n-1)a_{n-1}$，所以$2a_n=2S_n-2S_{n-1}=na_n-(n-1)a_{n-1}$，所以$(n-1)a_{n-1}=(n-2)a_n$。

方法一(累乘)：当$n\geqslant3$时，可得$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n-2}$，所以$a_n=\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n-1}{n-2}\times a_2=n-1$。

又因为当$n=2$或$n=1$时，$a_1=0$，$a_2=1$适合上式，所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n-1$。

方法二(等差数列定义)：由$(n-1)a_{n-1}=(n-2)a_n$得，当$n\geqslant3$时，$\frac{a_{n-1}}{n-2}=\frac{a_n}{n-1}$，所以$\left\{\frac{a_n}{n-1}\right\}$为等差数列，公差$d=0$，所以$\frac{a_n}{n-1}=\frac{a_2}{1}=1$，得到$a_n=n-1$，再验证当$n=2$或$n=1$时，$a_1=0$，$a_2=1$也适合。

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n-1$。

(2)由(1)可得$\frac{a_n+1}{2^n}=\frac{n}{2^n}$。

所以$T_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}$，$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots+\frac{n}{2^{n+1}}$。

所以 $\frac{1}{2}T_n=T_n-\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}$。

所以 $T_n=2-\frac{n+2}{2^n}$。

评注:(1)先求得 $a_1=0$,进而可得当 $n\geqslant 3$ 时,$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n-2}$,由累乘法可求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;也可以用方程的特征构造常数数列,再求通项。(2)由(1)可得 $\frac{a_n+1}{2^n}=\frac{n}{2^n}$,根据等差乘以等比的结构特征,利用错位相减法可求数列 $\left\{\frac{a_n+1}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n。当然,学有余力的同学也可以用裂项法求其前 n 项和 T_n。

2. 精准把握好数列公式的函数特征

例 6 (2023年新课标Ⅰ卷T20)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d,且 $d>1$,令 $b_n=\frac{n^2+n}{a_n}$,记 S_n,T_n 分别为数列 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 的前 n 项和。

(1)若 $3a_2=3a_1+a_3$,$S_3+T_3=21$,求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)若数列 $\{b_n\}$ 为等差数列,且 $S_{99}-T_{99}=99$,求 d。

解析:(1)由 $3a_2=3a_1+a_3$,$S_3+T_3=21$,

可得 $\begin{cases}3(a_1+d)=3a_1+a_1+2d,\\ 3a_1+3d+\left(\frac{2}{a_1}+\frac{6}{a_1+d}+\frac{12}{a_1+2d}\right)=21,\end{cases}$

所以 $\begin{cases}a_1=d,\\ 6d+\frac{9}{d}=21,\end{cases}$ 所以 $2d^2-7d+3=0$,解得 $d=3$ 或 $d=\frac{1}{2}$。

因为 $d>1$,所以 $d=3$,所以 $a_1=d=3$。

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=3n$,$n\in\mathbf{N}^*$。

(2)已知 $\{a_n\}$ 为等差数列,$\{b_n\}$ 为等差数列,根据等差数列的通项公式的性质可设 $a_n=tn$,则 $b_n=\frac{n+1}{t}$,且 $d=t>1$;或设 $a_n=k(n+1)$,则 $b_n=\frac{n}{k}$,且 $d=k>1$。

①当 $a_n=tn$ 时,则有 $b_n=\frac{n+1}{t}$,$d=t>1$。

所以 $S_{99}-T_{99}=\frac{(t+99t)\times 99}{2}-\left(\frac{2}{t}+\frac{100}{t}\right)\times\frac{99}{2}=99$,化简整理得 $50t^2-t-51=0$,解得 $d=-1$ 或 $d=\frac{51}{50}$,又因为 $d=t>1$,所以 $d=t=\frac{51}{50}$。

②当 $a_n=k(n+1)$ 时,则有 $b_n=\frac{n}{k}$,$d=k>1$。

所以 $S_{99}-T_{99}=\frac{(2k+100k)\times 99}{2}-\left(\frac{1}{k}+\frac{99}{k}\right)\times\frac{99}{k}=99$,化简整理得 $51k^2-k-50=0$,解得 $k=-1$ 或 $k=\frac{50}{51}$,又因为 $k=d>1$,所以此时 k 无解。

综上可得,$d=\frac{51}{50}$。

评注:(1)根据题意及等差数列的通项与求和的基本量,建立方程组,即可求解;(2)根据题意及等差数列的通项公式具有一次函数的特征,所以 $b_n=\frac{n(n+1)}{a_n}$ 中一定有因式可以约分成一次函数的特征。因此,设 $a_n=tn$,则 $b_n=\frac{n+1}{t}$,且 $d=t>1$;或设 $a_n=k(n+1)$,则 $b_n=\frac{n}{k}$,且 $d=k>1$。再分类讨论,建立方程,即可求解。本题主要考查等差数列的性质,等差数列的通项公式与求和公式的应用,蕴含了方程思想、化归转化思想、分类讨论思想等。

2023年高考数学试卷中的数列试题虽然看起来常规,但扎扎实实地考查了数列的基本量,以及数列概念与定义中蕴含的本质问题,也很好地考查同学们的运算能力与逻辑思维能力,这样的题型为同学们指明了学习数列知识的方向。 (责任编辑 王福华)