



■王佩其

空集,是集合家族中一个最不起眼的成员,常常被人忽视。但你一旦把它忽视,你就会被它“耍了”。因此,在学习集合时,同学们一定要重视空集。

一、空集 $\emptyset$ 虽然不含任何元素,但它是客观存在的

例1 给出下列关系式:①若 $A=\emptyset$, $B=\emptyset$,则 $A=B$;② $\emptyset=\{\emptyset\}$;③ $\emptyset=\{0\}$;④ $\left\{x \mid \frac{1}{x}=0\right\}=\emptyset$;⑤设全集 $U=\mathbf{R}$,则 $\complement_U \mathbf{R}=\emptyset$ 。其中正确关系式的序号是_____。

解:空集是不含任何元素的集合,所有的空集都是相等的,①正确。 $\emptyset$ 和 $\{\emptyset\}$ 都是集合,其中 $\emptyset$ 不含任何元素,而 $\{\emptyset\}$ 是含有一个元素 $\emptyset$ 的集合,故 $\emptyset \neq \{\emptyset\}$,②错误。同理③错误。显然方程 $\frac{1}{x}=0$ 无解,即 $\left\{x \mid \frac{1}{x}=0\right\}=\emptyset$,④正确。全集 $U=\mathbf{R}$, $\complement_U \mathbf{R}$ 是一个不含任何元素的集合,即 $\complement_U \mathbf{R}=\emptyset$,⑤正确。正确关系式的序号是①④⑤。



空集是不含任何元素的集合,故不能用列举法或描述法把它表示出来,只能用一个专用符号 $\emptyset$ 来表示空集。

二、空集是任何集合的子集

例2 设全集 $U=\mathbf{R}$, $M=\{x \mid 3a < x < 2a+5\}$, $P=\{x \mid -2 \leq x \leq 1\}$ 。若 $M \subseteq \complement_U P$,求实数 a 的取值范围。

解:因为全集 $U=\mathbf{R}$, $P=\{x \mid -2 \leq x \leq 1\}$,所以 $\complement_U P=\{x \mid x < -2 \text{ 或 } x > 1\}$ 。

因为 $M \subseteq \complement_U P$,所以分 $M=\emptyset$, $M \neq \emptyset$ 这两种情况讨论。由题意画出数轴,如图1

所示。

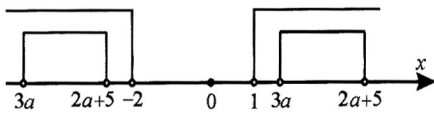


图1

当 $M=\emptyset$ 时,可得 $3a \geq 2a+5$,解得 $a \geq 5$;当 $M \neq \emptyset$ 时,由图1可得 $\begin{cases} 3a < 2a+5, \\ 2a+5 \leq -2 \end{cases}$ 或

$\begin{cases} 3a < 2a+5, \\ 3a \geq 1, \end{cases}$ 解得 $a \leq -\frac{7}{2}$ 或 $\frac{1}{3} \leq a < 5$ 。

综上所述, $a \leq -\frac{7}{2}$ 或 $a \geq \frac{1}{3}$,即所求实数 $a \in \left\{a \mid a \leq -\frac{7}{2} \text{ 或 } a \geq \frac{1}{3}\right\}$ 。



对于此类问题,忽视空集是一种常见错误,请同学们切记。在研究集合之间的关系时,Venn图和数轴是两个常用的工具,用它们反映集合之间的关系直观、形象,便于发现和研究问题。

三、空集是任何非空集合的真子集

例3 设集合 $A=\left\{x \in \mathbf{Z} \mid \frac{6}{2+x} \in \mathbf{N}\right\}$,则集合 A 的真子集的个数为_____。

解:要使 $\frac{6}{2+x} \in \mathbf{N}$,且 $x \in \mathbf{Z}$,需满足 $2+x=1, 2+x=2, 2+x=3$ 或 $2+x=6$,所以 $x=-1, x=0, x=1$ 或 $x=4$ 。所以集合 $A=\{-1, 0, 1, 4\}$ 。

集合 $A=\{-1, 0, 1, 4\}$ 的子集为 $\emptyset, \{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{4\}, \{-1, 0\}, \{-1, 1\}, \{-1, 4\}, \{0, 1\}, \{0, 4\}, \{1, 4\}, \{-1, 0, 1\}, \{-1, 0, 4\}, \{-1, 1, 4\}, \{0, 1, 4\}, \{-1, 0, 1, 4\}$,共16个子集。

去掉集合 $\{-1, 0, 1, 4\}$,则集合 A 的真子集的个数为 $16-1=15$ 。



一个共有 n 个元素的集合 A 的子集个数为 2^n ;去掉其本身,即得集合 A 的真子集的个数为 2^n-1 ;去掉空集,即得集合 A 的非空子集的个数为 2^n-1 ;两个都去掉,即得集合 A 的非空真子集的个数为 2^n-2 。

作者单位:江苏省太仓市明德高级中学

(责任编辑 郭正华)