# 圆锥曲线探究,思维“五步”构建

## ——以2021年新高考Ⅱ卷圆锥曲线压轴题为例

徐之财　华中师范大学(珠海)附属中学　519170

[摘　要] 综合的圆锥曲线是高考重要考查内容,问题的综合性及逻辑性较强,解析问题时可采用思维“五步法”,即定位考点、分析逻辑、绘制图象、构建思路、解析过程. 文章以2021年新高考Ⅱ卷圆锥曲线压轴题为例,利用“五步法”探究突破,并总结方法策略,提出相应的建议.

[关键词] 圆锥曲线;位置关系;五步法;通性通法

破解圆锥曲线综合题时要注重思维过程,立足考题探索解题策略. 思维“五步法”可有效定位考点,提取条件信息,绘制图象,构建思路. 下面结合考题进行探究.

### 考题呈现,考点分析

**考题**　(2021年新高考Ⅱ卷第20题)已知椭圆$C$的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$,右焦点为$F(\sqrt{2},0)$,且离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(1)求椭圆$C$的方程;

(2)设$M$和$N$是椭圆$C$上的两点,直线$MN$与曲线$x^2+y^2=b^2(x>0)$相切. 证明:$M$,$N$,$F$三点共线的充要条件为$|MN|=\sqrt{3}$.

**【定位考点】**

本题为圆锥曲线综合题,以椭圆为背景,研究椭圆、曲线和直线的位置关系,其中涉及相交、相切及共线等知识. 本题第(1)问求椭圆$C$的方程,考查椭圆方程的基础知识;第(2)问探究三点共线的充要条件,需要构建共线与弦长之间的关系,考查相切关系及充要条件.

### 思路构建,过程解析

对于圆锥曲线综合题,需要充分理解问题条件,结合考点知识确定解析方向. 在思路构建时,建议采用数形结合、分步开展的策略. 下面结合考题具体探究.

**1. 突破第(1)问**

该问求椭圆$C$的方程,需要确定特征参数$a$和$b$的值,核心条件有两个:①右焦点$F(\sqrt{2},0)$;②离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$. 根据上述两个条件可得$c=\sqrt{2}$,又$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,得$a=\sqrt{3}$,结合$b^2=a^2-c^2$可得$b^2=1$. 所以椭圆$C$的方程为$\frac{x^2}{3}+y^2=1$.

**2. 突破第(2)问**

由(1)问可知$b^2=1$,则$x^2+y^2=b^2$表示的是半径为1的圆,即$x^2+y^2=1$. 第(2)问涉及的条件较多,需要理解其中的逻辑关系,绘制对应图象,结合问题来确定求解思路. 下面分步探究.

**【分析逻辑】**

点$M$,$N$:两点在椭圆$C$上;

直线$MN$与圆:两者为相切关系;

椭圆$C$与圆:根据解析式可知,圆内切于椭圆;

探究点:$M$,$N$,$F$三点共线$\Leftrightarrow|MN|=\sqrt{3}$(充要条件).

**【绘制图象】**

根据上述所分析的位置关系,可绘制如图1所示的图象,探究重点为$M$,$N$,$F$三点共线与弦$MN$的长的关系.

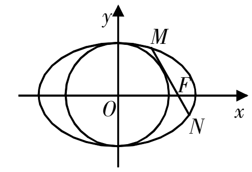


图1

**【构建思路】**

第(2)问需要结合问题本身来确定求解思路:探究证明$M$,$N$,$F$三点共线的充要条件为$|MN|=\sqrt{3}$,显然需

作者简介:徐之财(1986—),本科学历,中学一级教师,从事高中数学教学工作.

要分必要性和充分性两步来完成.

必要性：根据三点共线以及直线与圆相切可得出直线$MN$的方程，联立直线与椭圆方程可得弦$MN$的长，从而完成证明；

充分性：可设直线$MN$的方程为$y=kx+b(kb<0)$，由直线$MN$与圆相切可得$b^2=k^2+1$，联立直线与椭圆方程，结合弦长公式可得关于斜率$k$的方程，然后求出$k$值.

【解析过程】

基于上述求解思路，结合图象得出具体的解析过程如下：

当直线$MN$的斜率不存在时，直线$MN$：$x=1$，显然不符合题意.

当直线$MN$的斜率存在时，设点$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$.

必要性：若$M,N,F$三点共线，可设直线$MN$：$y=k(x-\sqrt{2})$，即$kx-y-\sqrt{2}k=0$. 由直线$MN$与曲线$x^2+y^2=1(x>0)$相切，可得$\dfrac{|\sqrt{2}k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得$k=\pm1$. 联立直线$MN$与椭圆$C$的方程得方程组$\begin{cases}y=\pm(x-\sqrt{2}),\\ \dfrac{x^2}{3}+y^2=1,\end{cases}$变形整理得$4x^2-6\sqrt{2}x+3=0$，由韦达定理得$x_1+x_2=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{3}{4}$，结合弦长公式得$|MN|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1\cdot x_2}=\sqrt{3}$，所以必要性成立.

充分性：设直线$MN$：$y=kx+b(kb<0)$，即$kx-y+b=0$. 由直线$MN$与曲线$x^2+y^2=1(x>0)$相切，可得$\dfrac{|b|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，即$b^2=k^2+1$. 联立直线$MN$与椭圆$C$的方程得方程组$\begin{cases}y=kx+b,\\ \dfrac{x^2}{3}+y^2=1,\end{cases}$变形整理得$(1+3k^2)x^2+6kbx+3b^2-3=0$，由韦达定理得$x_1+x_2=-\dfrac{6kb}{1+3k^2}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{3b^2-3}{1+3k^2}$. 所以$|MN|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1\cdot x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\dfrac{\sqrt{24k^2}}{1+3k^2}=\sqrt{3}$，化简得$(k^2-1)^2=0$，解得$k=\pm1$. 所以$\begin{cases}k=1,\\ b=-\sqrt{2},\end{cases}$或$\begin{cases}k=-1,\\ b=\sqrt{2},\end{cases}$所以直线$MN$：$y=x-\sqrt{2}$或$y=-x+\sqrt{2}$. 所以直线$MN$经过点$F(\sqrt{2},0)$，$M,N,F$三点共线，充分性成立.

综上所述，$M,N,F$三点共线的充要条件为$|MN|=\sqrt{3}$.

## 考题思考，解法总结

上述是对一道圆锥曲线考题进行的深入剖析，并探究了求解思路的构建过程. 下面深入反思，总结方法.

### 1. 关于考题的思考

考题为一道圆锥曲线综合题，第(2)问是核心之问，把握问题中的位置关系是重点. 探究此问显然需要构建“三点共线”与“弦长”的关系，这是几何与代数的转化. 问题中数形转化特性极为显著，故解析时需要联立直线与曲线的方程，利用韦达定理、弦长公式来构建关于直线斜率的方程.

### 2. 关于解法的总结

解析第(2)问时采用了分步构建的策略，即“定位考点→分析逻辑→绘制图象→构建思路→解析过程”. “五步法”的目的明确，核心点突出，下面深入分析“五步法”.

第一步——定位考点.

高考对圆锥曲线的考查针对性强，把握考点、结合考点关联知识是解题的关键. 解析时要充分理解问题，准确定位考点，包括所涉知识、考点内容.

第二步——分析逻辑.

该步中要基于考点分析题干的逻辑关系，深刻剖析题干信息，挖掘隐含条件，尤其是其中的位置关系，如点、直线与曲线之间的位置关系.

第三步——绘制图象.

数形结合是破解圆锥曲线综合题的常用解法，可直观呈现几何要素的位置关系，绘制图象时要尊重客观事实，对于不确定的位置关系可分别构图.

第四步——构建思路.

该步中要把握图象关系，结合问题条件确定解题方向，探索构建策略，如弦长问题中先联立方程，再由弦长公式继续推导.

第五步——解析过程.

解析过程中要融合知识定理与思想方法，充分处理、转化条件，思考简算技巧，如设而不求法、韦达定理法等.

### 3. 应用探究

上述对问题的深入思考，总结了“五步法”的破题策略，下面结合一道例题强化应用.

**例题** (2021年高考北京卷第20题)已知椭圆$E$：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点$A(0,-2)$，以四个顶点围成的四边形面积为$4\sqrt{5}$.

(1)求椭圆$E$的标准方程；

(2)过点$P(0,-3)$的直线$l$斜率为$k$，交椭圆$E$于不同的两点$B$和$C$，直线$AB$交$y=-3$于点$M$，直线$AC$交$y=-3$于点$N$，若$|PM|+|PN|\leqslant15$，求$k$的取值范围.

**解析** 根据条件可得椭圆$E$的标准方程为$\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$. 下面由“五步法”构建第(2)问的解析过程.

第一步——定位考点.

考题以椭圆为背景，设定直线$l$，形成了众多交点，需要分析线段的长和条件下直线斜率$k$的取值. 考点主要有两个：一是直线与曲线的位置关系；二是圆锥曲线中求线段长的策略——联立方程，设而不求.

第二步——分析逻辑.

直线$l$：过点$P$，斜率为$k$；

直线$l$与椭圆$E$：相交关系，交点$B$和$C$；

直线$AB$与直线$y=-3$：相交于点$M$；

直线$AC$与直线$y=-3$：相交于点$N$.

第三步——绘制图象.

结合上述所分析的位置关系，绘制如图2所示的图象，其中椭圆、点$P$、直线$y=-3$的位置是确定的.

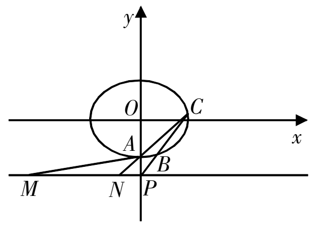

图2

第四步——构建思路.

问题探究的是在条件$|PM|+|PN|\leqslant 15$下$k$的取值范围,显然需要设定直线$l$的方程,推导点$M$和$N$的坐标,求出$|PM|$和$|PN|$,进而构建关于斜率$k$的不等式.

第五步——解析过程.

由条件可知直线$l$:$y=kx-3$,设点$B(x_1,y_1)$,$C(x_2,y_2)$,由于直线$l$的斜率存在,故$x_1x_2\neq 0$. 可推知直线$AB$:$y=\frac{y_1+2}{x_1}x-2$,与直线$y=-3$联立可得点$M\left(-\frac{x_1}{y_1+2},-3\right)$,同理得点$N\left(-\frac{x_2}{y_2+2},-3\right)$.

联立直线$l$与椭圆$E$的方程得方程组$\begin{cases}y=kx-3,\\4x^2+5y^2=20,\end{cases}$整理得$(4+5k^2)x^2-30kx+25=0$,由$\Delta=900k^2-100(4+5k^2)>0$,解得$k<-1$或$k>1$. 由韦达定理可得$x_1+x_2=\frac{30k}{4+5k^2}$①,$x_1x_2=\frac{25}{4+5k^2}$②,可知$x_1x_2>0$. 所以$|PM|+|PN|=|x_M+x_N|=\left|\frac{x_1}{y_1+2}+\frac{x_2}{y_2+2}\right|=\left|\frac{2kx_1x_2-(x_1+x_2)}{k^2x_1x_2-k(x_1+x_2)+1}\right|$,将①②代入后整理得$|PM|+|PN|=5|k|$,所以$5|k|\leqslant 15$,解得$|k|\leqslant 3$.

综上所述,$k$的取值范围为$[-3,-1)\cup(1,3]$.

## 探究思考,教学建议

**1. 梳理解析流程,形成“五步”策略**

圆锥曲线综合题的难度较大,解析时需要注意分析问题条件,合理构建解题思路. 教学中教师要结合考题开展流程梳理,构建“五步”策略破题. 以上述考题为例,解析核心之同时采用的“五步法”,系统呈现了从考点定位、条件分析到图象绘制、思路构建的过程. 教学时可指导学生理解每步的探究重点,关注各步的构建技巧,充分体验构建过程,形成系统的“五步”策略.

**2. 注重通性通法,积累解题经验**

圆锥曲线的命题形式多样,但可将问题分为几大类,教学中教师要引导学生充分剖析问题条件,掌握条件的转化策略及解析问题的通性通法. 以上述考题为例,探究三点共线与弦长之间的充要关系,方程联立、弦长构建是解题核心,这里需要学生掌握设而不求的技巧、弦长公式等知识. 教学中教师要帮助学生总结典型问题的通性通法,积累相应的解题经验.

**3. 倡导知识探究,发展学生的能力**

开展综合题探究有助于全面发展学生的能力,故教学中教师要立足考题开展问题探究,引导学生思考,启发学生思维. 探究过程要给学生留足思考空间,教师可合理设置问题,让学生充分认识问题,自主探索解题方法. 而在解析完成后,教师可引导学生进一步反思问题,优化解法,总结解题策略. 必要时教师可开展教学微设计,拆分综合性问题,引导学生体验构建过程,充分锻炼学生的思维.

---

(上接第42页)

从数学学科核心素养发展尤其是数学建模素养发展的角度来反思上述例子,可以发现在生活中习以为常的水温冷却,对于学生而言是既熟悉又陌生的. 说这个例子熟悉自然不需要解释,说这个例子陌生是因为其中的规律并不容易把握,尤其是一开始就让学生从数学规律的角度来解析水的冷却规律时,绝大多数学生感觉有一些意外. 当这种意外的感觉被消除后,学生的注意力迅速转移到了问题解决上. 这个时候就意味着学生已经默认了水的冷却规律可以用函数来描述,只不过这个函数解析式并不明确,因此学习的主要任务就是探究这一函数解析式.

这是学生自己的认识,呼应了上面提到的核心素养提高学生对学习认识的要求. 事实上,学生在问题解决的过程中,也确实认识到要想得到函数解析式并建立起相关模型,就必须真正面对水的冷却这一自然过程并且收集相关的数据,因为只有这样才能得到水温与时间之间的变化关系. 当学生认识到这一点时,实际上数据收集过程已经显得不太重要,学生更希望自己能够得到数据去分析,从而知晓具体的函数解析式是怎样的. 学生的这一想法实际上就是数学建模的动机所在,因此后续的努力过程就是一个数学建模过程,自然也就是数学学科核心素养的落地过程.

实践表明,这样一个教学过程是成功的,数学学科核心素养的发展也是有保证的,这说明上述理论的学习与总结,得到了实践验证,理论与实践之间形成了契合关系. 这对于一线教师教学而言自然是一件好事,也意味着面向当下的高中数学教学,理论学习应当成为实践探究的先导,实践探究应当成为理论学习的佐证. 遵循这样的教学思路,可以做到应试与核心素养发展两不误.

**参考文献:**

[1] 史宁中,林玉慈,陶剑,郭民. 关于高中数学教育中的数学核心素养——史宁中教授访谈之七[J]. 课程·教材·教法,2017,37(04):8-14.
[2] 卢小妹. 关于高中数学核心素养的认识[J]. 福建中学数学,2016(06):16-18.