

基于数学核心素养下单元整体设计研究性学习课例

——“椭圆及其标准方程”教学设计与实录

翁小柳

(海南省农垦中学,海南 海口)

摘要:《普通高中数学课程标准(2017年版)》中明确提出了高中数学教学要提升和发展学生的数学核心素养。将以“椭圆及其标准方程”为例,以数学核心素养的落实为出发点设计教学过程,使数学学科素养在课堂教学中得以落实。

关键词:椭圆的定义;椭圆的方程;数学学科;核心素养;研究性学习

一、教学内容与学生学情分析

本节课的主要内容是抽象椭圆的定义、推导椭圆的标准方程,本节课不仅是圆锥曲线的起始课,还是解析几何知识体系的构建中具有承上启下作用的一节课。本课时通过实际例子感受研究椭圆的必要性,对实际例子的分析,直观感知出椭圆的几何特征,进而抽象出几何形式下的定义。让学生动手画椭圆,充分运用几何画板动态展示等环节的设计,有助于提升学生的直观想象和数学抽象等素养。

本节课将通过让学生动手画椭圆的小实验,再直接操作来感知椭圆上的点满足的几何条件,然后在此基础上抽象定义、推导方程,符合学生的知识体系构建的发展规律。此外,推导椭圆标准方程的过程中,将出现含两个根号的方程化简,学生之前很少接触这类化简,对学生而言具有一点的难度,这是本节课的难点。

二、教学目标

(1)简单了解圆锥曲线的发展过程,体验其文化价值,提升学生的直观想象核心素养。

(2)通过小实验动手画椭圆,直接感知椭圆的几何特征,进而抽象椭圆的定义,提升数学抽象和逻辑推理等核心素养。

(3)依据椭圆定义推导其标准方程,提升数学建模、数学运算等核心素养。

重点:(1)椭圆的定义;(2)椭圆的标准方程。

难点:椭圆定义的抽象及其标准方程的推导。

三、教学过程展示

1.了解椭圆的实际应用及发展历史

学生活动 1:观看嫦娥 1 号优美的椭圆运行轨道以及生活中常见的椭圆图例。

【设计意图】通过精彩的视频展示,让学生了解椭圆在我国航天领域的应用并导入新课题,指出学生在日常生活体验中对椭圆的感性认识是错误的,引起认知冲突,从而激发学生的学习兴趣,求知欲,并引出本节课的学习内容。

教师活动 1:介绍椭圆的起源与发展

(1)圆锥曲线的雏形:梅内克缪斯从计时沙漏中发现圆锥曲线。

(2)阿波罗尼奥斯提出“用平面从不同的角度截同一个圆锥可以得到三种圆锥曲线”。

【设计意图】了解椭圆的发现过程,激发学生的学习兴趣,让学生体验椭圆发展历程,在这一过程中也可以提升学生的直观想象素养。

2.引导学生尝试实验,形成概念

提出问题:椭圆在科技、生产等方面应用广泛,我们能否用手画出椭圆呢?

学生活动 2:数学实验

取一条长度为 30 cm 的细绳,把它的两端固定在纸板上的两个定点(两个定点之间的距离小于 30 cm),用笔尖 M 把细绳拉紧,在纸板上移动笔尖,画出的轨迹是什么曲线?若将两个定点之间的距离调整到 30 cm,画出的轨迹又是什么图形?距离调整到 35 cm 呢?思考:

(1)在画图过程中,细绳两头的位置是固定的还是运动的?

(2)在画图过程中,细绳的长度是否改变?说明了什么?

(3)在画图过程中,细绳长度与两定点距离有什么关系?

(4)改变两个定点之间的距离,椭圆的形状是否发生变化?当两个定点的距离与绳长相等及大于绳长时,画出的图形还是椭圆吗?还能画出图形吗?

发现:细绳长度大于两个定点的距离时,轨迹为椭圆;细绳长度等于两个定点的距离时,轨迹为线段;细绳长度小于两个定点的距离时,轨迹不存在。

教师:在笔尖 M 运动过程中,什么是不变的?

学生 1:无论笔尖 M 运动到何处,绳长是不变的。

教师:若把两个定点分别记为 F_1 、 F_2 ,那么椭圆上的点 M 满足什么特征?

学生: $|MF_1| + |MF_2|$ 为定值。

教师:让学生通过观察几何画板软件,验证当椭圆上的点 M 运动时, $|MF_1|+|MF_2|$ 为定值。

教师:请同学们回忆一下圆的定义,类比圆的定义,根据上面的实验结果,如何定义椭圆?

生1:我们把平面内与两个定点 F_1, F_2 的距离的和等于常数的点的轨迹叫作椭圆。

生2:不够严谨,还需补充一个限制条件:这个常数大于 $|F_1F_2|$,否则点的轨迹是线段或不存在。

教师:生2补充得特别完整!

【设计意图】学生的直观想象、数学抽象等核心素养也可以进一步提升。此外,学生在动手画椭圆的过程中,对椭圆的几何性质产生初步的直观感受,比如椭圆是一个封闭的对称图形,细绳长度不变时两个定点的改变对椭圆扁平程度的影响等,为后续学习椭圆的几何性质埋下直观铺垫。

3. 根据定义,推导方程

(1) 回顾方法

教师:观察所画的椭圆,感知它有什么样的特征?

生:椭圆是具有对称性,既是轴对称图形又是中心对称图形。

教师:事实上,通过观察能“感知”椭圆的某些性质,观察所获得的这些结论是否正确?这些性质是所有椭圆的共同特征吗?我们怎样更客观地认识椭圆的性质?

生:我们之前学习了圆的方程,通过方程的代数特征研究了圆的几何性质,我们可以类比圆的学习,用方程的形式刻画椭圆,通过椭圆的方程代数特征来研究椭圆的几何性质。

教师:回答得特别好!

(2) 推导过程

教师:请同学们写出椭圆上的点满足的关系式。

$$\text{生: } \sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$$

教师:这个方程含有两个根号,形式比较复杂,数学追求简洁美,我们如何把它化简一些?也就是说是否可以把根号去掉。

教师:同学们有不同的建系方法吗?

生:以 F_1, F_2 所在直线为 y 轴,以线段 F_1F_2 的垂直平分线为 x 轴,建立直角坐标系。

教师:此时椭圆的方程是什么?如何获得?

生1:类似于方案一的推导过程整理可得,此时椭圆的方程是 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$

教师:能否类比焦点在 x 轴的标准方程,直接写出焦点在 y 轴的标准方程?

生2:利用式子的对称性直接调换 x, y 的位置,即可获得焦点在 y 轴的标准方程。

教师:我们把中心在原点、焦点在坐标轴上的椭圆的方程叫

作椭圆的标准方程,椭圆的标准方程有两种不同的形式。

【设计意图】椭圆标准方程的推导是本节课的一个难点,也是提升学生运算素养的良机,不能照本宣科地按照教材简单带过,当学生都意识到在定义条件下列出的椭圆的方程有化简的必要时,如何实现化简显得尤其关键。在化简方程的具体过程中,学生并没有单一地遵循教科书的化简方法,而是提供了不同的化简方式,尤其是推导焦点在 y 轴的标准方程时,在老师的启发下,学生能够类比焦点在 x 轴的标准方程,直接获得焦点在 y 轴的标准方程,让学生认识到类比不仅是一种温故知新的学习方法,更是解决数学问题的有效途径。在这一环节中,学生的计算思维得到发散,运算素养得以提升,难点逐步突破。通过两种形式的标准方程的对比,加深了学生对椭圆定义及其标准方程内在联系的理解,突出本节课的重点。

4. 经历回顾,课堂小结

教师:本节课学习了哪些知识?运用了哪些数学思想与方法?

生:(1)本节课学习了椭圆的定义及其标准方程:

$$\textcircled{1} \text{ 焦点在 } x \text{ 轴时 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$$

$$\textcircled{2} \text{ 焦点在 } y \text{ 轴时 } \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$$

(2)研究方法:坐标法;数学思想:数学结合思想、类比思想。

【设计意图】让学生进行课堂小结,回顾本节课所学知识及数学方法,可以帮助学生梳理知识结构,掌握知识的内在联系,促进学生的知识体系构建,有助于培养学生自我获取知识的能力。

5. 作业布置(略)

四、教学反思

六大数学核心素养不是绝对的分割,而是相对统一的,每一个核心素养之间既是对立的,又相互交融,它们形成一个密不可分的有机整体。解析几何的学习关键是提升学生的直观想象、数学抽象、数学建模、数学运算等核心素养。本节课通过椭圆在科技、生产等方面的应用,对椭圆发展历史的初步了解,激发学生的学习热情;接着通过学生动手画椭圆,观看几何画板的动态展示,得到椭圆上的点满足的几何条件,类比圆的定义,抽象归纳椭圆的定义;再根据椭圆的定义,利用坐标法推导椭圆的标准方程。在这个过程中,使学生认识到数学源于生活,用于生活,体验数学的应用价值和文化价值。对椭圆概念的归纳,提升了学生的数学抽象、数学建模能力,用坐标法推导椭圆的标准方程,渗透数形结合思想、类比思想,提升了学生的数学运算、逻辑推理能力,使数学核心素养在课堂教学过程中落地生根。

作者简介:翁小柳(1980.6—),女,籍贯:海南万宁,学历:大学本科,职称:中学一级,主要研究方向:高中数学教学。

● 编辑 李建军