活跃在几何问题中的函数最值

■ 张飞雄

摘要:解析几何中最值、范围问题和立体几何最值、探索性问题是各类考试中常见题型,其试题难度属中、高档题[1],若题目的条件和结论能体现一种明确的函数,则可首先建立目标函数,再求这个函数的最值,求函数最值的常用方法有配方法、判别式法、基本不等式法及函数的单调性法等.

关键词:解析几何;立体几何;函数最值

一、活跃在解析几何问题中的函数最值

解析几何中圆锥曲线有关的范围、最值问题,其实是待求量表示为其他变量的函数,求其值域,从而确定参数的取值范围.

1. 一元最值化函数最值

例 1　已知抛物线 $E:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F,点 $M(4,m)$ 在抛物线 E 上,且 $\triangle OMF$ 的面积为 $\frac{1}{2}p^2$(O 为坐标原点).

(1) 求抛物线 E 的方程;

(2) 过焦点 F 的直线 l 与抛物线 E 交于 A,B 两点,过 A,B 分别作垂直于 l 的直线 AC,BD,分别交抛物线于 C,D 两点,求 $|AC|+|BD|$ 的最小值.

解:(1) 由题意可得 $\begin{cases} m^2=8p \\ \frac{1}{2}\times\frac{p}{2}\cdot|m|=\frac{1}{2}p^2 \end{cases}$

解得 $p=2$.

故抛物线 E 的方程为 $y^2=4x$.

(2) 由题意知直线 l 的斜率一定存在且不为 0,$F(1,0)$,设直线 l 的方程为 $x=ty+1,t\neq0$,

设 $A(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$,

易知 $x_1=ty_1+1>0,x_2=ty_2+1>0$,

联立 $\begin{cases} x=ty+1 \\ y^2=4x \end{cases}$

消去 x 得 $y^2-4ty-4=0$.

所以 $y_1+y_2=4t,y_1y_2=-4$.

由 AC 垂直于 l,得直线 AC 的方程为 $y-y_1=-t(x-x_1)$,

联立 $\begin{cases} y-y_1=-t(x-x_1) \\ y^2=4x \end{cases}$,

消去 x 得 $ty^2+4y-4tx_1-4y_1=0$.

所以 $y_1+y_2=-\frac{4}{t},y_1y_2=\frac{-4tx_1-4y_1}{t}$.

所以 $|AC|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$=\sqrt{(1+\frac{1}{t^2})[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}$

$=\sqrt{(1+\frac{1}{t^2})\cdot\frac{16+16t^2x_1+16ty_1}{t^2}}$

$=\sqrt{(1+\frac{1}{t^2})\cdot\frac{16+4t^2{y_1}^2+16ty_1}{t^2}}$

$=\frac{2\sqrt{t^2+1}}{t^2}\cdot|ty_1+2|=\frac{2\sqrt{t^2+1}}{t^2}\cdot(ty_1+2)$.

同理可得 $|BD|=\frac{2\sqrt{t^2+1}}{t^2}\cdot(ty_2+2)$,

所以 $|AC|+|BD|=\frac{2\sqrt{t^2+1}}{t^2}\cdot[t(y_1+y_2)+4]=\frac{8\sqrt{t^2+1}}{t^2}(t^2+1)=8\sqrt{\frac{(t^2+1)^3}{t^4}}$,

令 $f(x)=\frac{(x+1)^3}{x^2},x>0$,

则 $f'(x)=\frac{(x+1)^2(x-2)}{x^3},x>0$,

所以当 $x\in(0,2)$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减;当 $x\in(2,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增.

作者简介:张飞雄(1972-),福建宁化人,本科,中学高级教师,主要从事高中数学教学研究

所以当 $x=2$ 时,$f(x)$ 取得最小值,即当 $t=\pm\sqrt{2}$ 时,$|AC|+|BD|$ 的最小值为 $12\sqrt{3}$.

点评:直线和圆锥曲线的位置关系问题,往往要善于利用韦达定理设而不求,利用弦长公式得关于 t 的一元函数关系式,再导数方法求函数最小值.

2. 二元最值化函数最值

利用关系式,将二元函数的最值问题化为一元函数最值问题来处理.

例 2　已知 O 为坐标原点,椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$,且经过点 $P(\sqrt{6},1)$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 直线 l 与椭圆 C 交于 A,B 两点,直线 OA 的斜率为 k_1,直线 OB 的斜率为 k_2,且 $k_1k_2=-\frac{1}{3}$,求 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 的取值范围.

解:(1) 由题意可得 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}\\ \frac{6}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\end{cases}$

又 $a^2=b^2+c^2$,解得 $a=3,b=\sqrt{3}$.

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2) 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,

当直线 l 的斜率存在时,设 $l:y=kx+t$,

联立 $\begin{cases}y=kx+t\\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$

消去 y 得 $(1+3k^2)x^2+6ktx+3t^2-9=0$,$\Delta=12(3+9k^2-t^2)>0$,

则 $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{-6kt}{1+3k^2}\\ x_1x_2=\frac{3t^2-9}{1+3k^2}\end{cases}$,

又 $k_1k_2=\frac{y_1y_2}{x_1x_2}=-\frac{1}{3}$,

故 $y_1y_2=-\frac{1}{3}x_1x_2$ 且 $x_1x_2\neq0$,即 $3t^2-9\neq0$,则 $t^2\neq3$,又 $y_1=kx_1+t,y_2=kx_2+t$,

所以 $\frac{y_1y_2}{x_1x_2}=\frac{(kx_1+t)(kx_2+t)}{x_1x_2}=k^2+\frac{kt(x_1+x_2)+t^2}{x_1x_2}=\frac{t^2-9k^2}{3t^2-9}=-\frac{1}{3}$

整理得 $2t^2=9k^2+3\geqslant3$,则 $t^2\geqslant\frac{3}{2}$ 且 $\Delta>0$ 恒成立.

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2-\frac{1}{3}x_1x_2=\frac{2}{3}x_1x_2=\frac{2}{3}\cdot\frac{3t^2-9}{1+3k^2}=3(1-\frac{3}{t^2})$,又 $t^2\geqslant\frac{3}{2}$,且 $t^2\neq3$,故 $3(1-\frac{3}{t^2})\in[-3,0)\cup(0,3)$.

当直线 l 的斜率不存在时,$x_1=x_2,y_1=-y_2$,则 $k_1k_2=-\frac{y_1^2}{x_1^2}=-\frac{1}{3}$,又 $\frac{x_1{}^2}{9}+\frac{y_1{}^2}{3}=1$,解得 $x_1{}^2=\frac{9}{2}$,则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1{}^2-y_1{}^2=\frac{2}{3}x_1{}^2=3$.

综上,$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 的取值范围为 $[-3,0)\cup(0,3)$.

点评:注意利用斜率关系式把二元转化为一元,进而转化为求函数值域问题.

3. 双参数最值问题

该类问题往往有三种类型:① 建立两个参数之间的等量关系和不等式关系,通过整体消元得到参数的取值范围;② 建立两个参数的等量关系,通过分离参数,借助一边变量的范围,确定另一个参数的取值范围;③ 建立两个参数的等量关系,通过选取一个参数为自变量,令一个变量为参数(主元思想),从而确定参数的取值范围.

例 3　设椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$,过 $M(2,\sqrt{2})$,$N(\sqrt{6},1)$ 两点,O 为坐标原点.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 是否存在圆心在原点的圆,使得该圆的任意一条切线与椭圆 E 恒有两个交点 A,B,且 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$? 若存在,写出该圆的方程,并求 $|AB|$ 的取值范围;若不存在,说明理由.

解析:(1) 解略. 椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2) 假设满足题意的圆存在,其方程为 $x^2+y^2=$

R^2,其中$0<R<2$,设该圆的任意一条切线AB和椭圆E交于$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$两点,当直线AB的斜率存在时,令直线AB的方程为$y=kx+m$ ①

将其代入椭圆E的方程并整理得$(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-8=0$,

由韦达定理得,

$\Delta=16k^2m^2-4(2k^2+1)(2m^2-8)>0$,

$x_1+x_2=-\dfrac{4km}{2k^2+1}$,

$x_1x_2=\dfrac{2m^2-8}{2k^2+1}$ ②

因为$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$,所以$x_1x_2+y_1y_2=0$ ③

将①代人③并整理得$(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=0$.

联立②得$m^2=\dfrac{8}{3}(1+k^2)$ ④

因为直线AB和圆相切,因此$R=\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$,再由④得$R=\dfrac{2\sqrt6}{3}$.所以存在圆$x^2+y^2=\dfrac{8}{3}$满足题意.当切线$AB$的斜率不存在时,易得$x_1^2=x_2^2=\dfrac{8}{3}$,由椭圆$E$的方程得$y_1^2=y_2^2=\dfrac{8}{3}$,显然$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$.

综上所述,存在圆$x^2+y^2=\dfrac{8}{3}$满足题意.下面求$|AB|$的取值范围.

解法1:(常规解法)当切线AB的斜率存在时,由①②④得

$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(-\dfrac{4km}{2k^2+1}\right)^2-4\times\dfrac{2m^2-8}{2k^2+1}}=4\sqrt2\sqrt{\dfrac{k^2+1}{2k^2+1}}\cdot\sqrt{1-\dfrac{2}{3}\times\dfrac{k^2+1}{2k^2+1}}$.

令$t=\dfrac{k^2+1}{2k^2+1}$,则$\dfrac{1}{2}<t\leqslant1$.

因此$|AB|^2=32t(1-\dfrac{2}{3}t)=-\dfrac{64}{3}(t-\dfrac{3}{4})^2+12$,

所以$\dfrac{32}{3}\leqslant|AB|^2\leqslant12$,即$\dfrac{4\sqrt6}{3}\leqslant|AB|\leqslant2\sqrt3$.

当切线AB的斜率不存在时,易得$|AB|=\dfrac{4\sqrt6}{3}$,所以$\dfrac{4\sqrt6}{3}\leqslant|AB|\leqslant2\sqrt3$.

综上所述,存在圆心在原点的圆$x^2+y^2=\dfrac{8}{3}$满足题意,且$\dfrac{4\sqrt6}{3}\leqslant|AB|\leqslant2\sqrt3$.

解法2:(妙思巧解)如图1所示,过原点O作$OD\perp AB$,垂足为D,则D为切点.

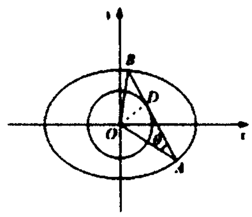

图1

设$\angle OAB=\theta$,则θ为锐角,

且 $|AD|=\dfrac{2\sqrt6}{3\tan\theta}$,

$|BD|=\dfrac{2\sqrt6}{3}\tan\theta$,

所以$|AB|=\dfrac{2\sqrt6}{3}(\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta})$,因为$2\leqslant|OA|\leqslant2\sqrt2$,所以$\dfrac{\sqrt2}{2}\leqslant\tan\theta\leqslant\sqrt2$.

令$t=\tan\theta$,易证:当$t\in[\dfrac{\sqrt2}{2},1]$时,$|AB|=\dfrac{2\sqrt6}{3}(t+\dfrac{1}{t})$单调递减.

当$t\in[1,\dfrac{\sqrt2}{2}]$时,$|AB|=\dfrac{2\sqrt6}{3}(t+\dfrac{1}{t})$单调递增,

所以$\dfrac{4\sqrt6}{3}\leqslant|AB|\leqslant2\sqrt3$.

点评:直线和椭圆的位置关系问题,往往要善于利用韦达定理设而不求,解法1利用点在椭圆上和向量式得$m^2=\dfrac{8}{3}(1+k^2)$,所以可得$|MN|=f(k)$进而求函数值域;解法2换元后利用对勾函数单调性求解.

二、活跃在立体几何中的函数最值

在立体几何学习中,有些数学问题直接解比较困难,特别是碰到几何体中有动点、动角或动线段时,通过建系或引入变量,把这类动态问题转化为目标函数,

从而利用函数求目标函数的最值.

1. 设参数转化函数最值

例4　如图2,正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为2,E,F 分别为 BD 和 BB_1 的中点,P 为棱 C_1D_1 上的动点.

(1) 是否存在点 P,使得 $PE\perp$ 平面 EFC? 若存在,求出满足条件时 C_1F 的长度并证明;若不存在,请说明理由;

(2) 当 C_1P 为何值时,平面 BCC_1B_1 与平面 PEF 夹角的正弦值最小.

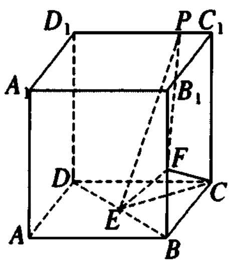

图2

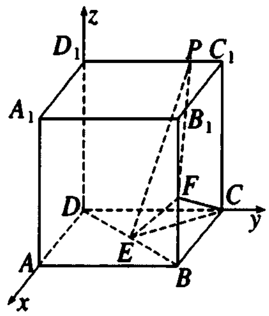

图3

解:建立如图3所示的空间直角坐标系,

根据题意设点 $P(0,t,2)$,$0\leqslant t\leqslant 2$,则 $E(1,1,0)$,$F(2,2,1)$,$C(0,2,0)$,

(1) $\overrightarrow{PE}=(1,1-t,-2)$,$\overrightarrow{EF}=(1,1,1)$,$\overrightarrow{CF}=(2,0,1)$,

设平面 CEF 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{EF}=x+y+z=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{CF}=2x+z=0\end{cases}$ 令 $x=1$,得 $z=-2$,$y=1$,

所以 $\vec{m}=(1,1,-2)$,若存在满足题意的点 P,则 $\overrightarrow{PE}/\!/\vec{m}$,

所以 $\dfrac{1-t}{1}=1$,所以 $t=0$,满足 $0\leqslant t\leqslant 2$,即 P 与 D_1 重合时,$PE\perp$ 平面 EFC,此时 $C_1P=2$.

(2) 易知平面 BCC_1B_1 的法向量为 $\vec{n}=(0,1,0)$,

设平面 PEF 的法向量为 $\vec{r}=(x_0,y_0,z_0)$,又 $\overrightarrow{PF}=(2,2-t,-1)$,$\overrightarrow{PE}=(1,1-t,-2)$,

所以 $\begin{cases}\vec{r}\cdot\overrightarrow{PF}=2x_0+(2-t)(y_0-z_0)=0\\ \vec{r}\cdot\overrightarrow{PE}=x_0+(1-t)(y_0-2z_0)=0\end{cases}$

令 $y_0=1$,则 $x_0=\dfrac{t}{3}-1$,$z_0=-\dfrac{t}{3}$,所以 $\vec{r}=(\dfrac{t}{3}-1,1,-\dfrac{t}{3})$,

设平面 BCC_1B_1 与平面 PEF 的夹角为 θ,

则 $\cos\theta=|\cos\langle\vec{n},\vec{r}\rangle|$

$$=\frac{1}{\sqrt{(\frac{t}{3}-1)^2+1+(-\frac{t}{3})^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{2(t^2-3t)}{9}+2}},0\leqslant t\leqslant 2,$$

所以当 $t=\dfrac{3}{2}$ 时,$(\cos\theta)_{\max}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,$(\sin\theta)_{\min}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

此时 $C_1P=2-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$.

2. 导数法求最值问题

例5　如图4所示,菱形 $ABCD$ 的边长为2,现将 $\triangle ACD$ 沿对角线 AC 折起,使平面 $ACD'\perp$ 平面 ACB,则此时空间四面体 $ABCD'$ 体积的最大值为(　　)

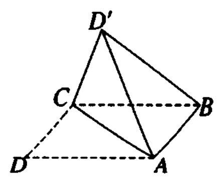

图4

(A) $\dfrac{16\sqrt{3}}{27}$　　(B) $\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$

(C) 1　　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

答案:(A)

解析:取 AC 的中点 O,连接 $D'O$(图略).

设 $\angle ABC=\partial$,$\partial\in(0,\pi)$,所以 $D'O=AD'\cos\dfrac{\partial}{2}=2\cos\dfrac{\partial}{2}$,$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times2\times2\sin\partial=2\sin\partial$.

因为 $D'O\perp$ 平面 ACB,所以 $V_{四边形ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}\times D'O=\dfrac{4}{3}\sin\partial\cos\dfrac{\partial}{2}=\dfrac{8}{3}\sin\dfrac{\partial}{2}\cos^2\dfrac{\partial}{2}=\dfrac{8}{3}\sin\dfrac{\partial}{2}\cdot(1-\sin^2\dfrac{\partial}{2})$,$(0<\dfrac{\partial}{2}<\dfrac{\pi}{2})$.

设 $t=\sin\frac{\partial}{2}$，则 $0<t<1$，$V_{\text{四边形ABCD}}=\frac{8}{3}(t-t^3)$.

设 $f(t)=\frac{8}{3}(t-t^3)$，则 $f'(t)=\frac{8}{3}(1-3t^2)$，$0<t<1$.

所以当 $0<t<\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$f'(t)>0$，$f(t)$ 单调递增；当 $\frac{\sqrt{3}}{3}<t<1$ 时，$f'(t)<0$，$f(t)$ 单调递减. 所以当 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$f(t)$ 取得最大值 $\frac{16\sqrt{3}}{27}$.

所以四面体 $ABCD'$ 体积的最大值为 $\frac{16\sqrt{3}}{27}$.

动态的变化引起的最值问题，应找出问题中的动态变量关系式，建立目标函数，在目标函数建成后，可用一次函数的端点法，二次函数的配方法、公式法，函数有界法(如三角函数等)，对勾函数或基本不等式，及函数的拐点导数法等求目标函数的最值，进而解决几何最值(范围)问题[2].

参考文献：

[1] 吕二动. 活跃在竞赛试题中的三角函数最值问题[J]. 数理化学习：高中版，2022(06)：39 - 40.

[福建省宁化第一中学(365400)]

(上接第 20 页)

以上两种方法是解决此类问题的通法，当然本题还可以利用圆锥曲线方程代入法，$\frac{k_1}{k_2}=\frac{y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)}$，则 $(\frac{k_1}{k_2})^2=\frac{y_1^2(x_2-2)^2}{y_2^2(x_1+2)^2}$，因为 $\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1$，所以 $y_1^2=3(1-\frac{x_1^2}{4})$，同理有 $y_2^2=3(1-\frac{x_2^2}{4})$. 所以 $(\frac{k_1}{k_2})^2=\frac{3(1-\frac{x_1^2}{4})(x_2-2)^2}{3(1-\frac{x_2^2}{4})(x_1+2)^2}=\frac{(2-x_1)(2-x_2)}{(2+x_2)(2+x_1)}=\frac{4-2(x_1+x_2)+x_1x_2}{4+2(x_1+x_2)+x_1x_2}$. 联立直线与椭圆的方程，消去 y，应用韦达定理处理.

直线与圆锥曲线综合问题中，不仅要强化理解几何问题代数化的思路方法，而且要重视运算过程的分析指导，揭示算法背后的算理，探索减少运算的技巧，这样才能真正地提升数学运算核心素养.

参考文献：

[1] 田鹏. 例谈解析几何中非对称结构问题的处理策略[J]. 中学数学教学参考，2021(8).

[2] 卢会玉. 非韦达对称问题解题策略研究[J]. 数理化学习：高中版，2021(9).

[甘肃省白银市第一中学(730900)]